

Note di Meccanica Razionale

Giovanni Mascali

Dipartimento di Matematica
Università della Calabria, Arcavacata di Rende (CS)

Indice

Considerazioni di carattere generale	i
1 Cinematica	1
1.1 Riferimenti spazio-temporali della cinematica classica	1
1.2 Punto materiale	2
1.3 Equazioni del moto di un punto e traiettoria	3
1.4 Velocità ed accelerazione	3
1.5 Moti piani	5
1.6 Moto circolare e moto armonico	7
1.7 Moti composti	9
1.8 Moti elicoidali	11
1.9 Cambiamento di riferimento	12
1.10 Moto di un corpo rigido	16
1.11 Formula fondamentale della cinematica di un moto rigido . .	18
1.12 Teorema di Mozzi	21
1.13 Alcuni moti rigidi particolari	22
1.13.1 Moti traslatori	22
1.13.2 Moto rotatorio	23
1.13.3 Moto rototraslatorio	25
1.13.4 Moto elicoidale	25
1.13.5 Moto rigido sferico	26
1.13.6 Moto rigido piano	26
1.14 Moti rigidi generici	27
1.15 Angoli di Eulero	29
1.16 Moti relativi	33
1.17 Derivata assoluta e derivata relativa	35
1.18 Moti composti di corpi in moto rigido	35
1.19 Precessioni regolari	36

2	Dinamica	39
2.1	Sistemi di riferimento inerziali	39
2.2	Legge di forza in un sistema isolato di punti materiali	40
2.3	Grandezze oggettive	41
2.4	Comportamento delle forze e delle leggi di forza	42
2.5	La legge del moto di Newton	45
2.6	Determinazione del moto di un sistema di punti materiali	46
2.7	Principio di relatività (di Galilei)	47
2.8	Moto di un sistema di punti in un ambiente esterno	47
2.9	Sistemi di punti materiali, equazioni cardinali	49
2.10	Quantità di moto e momento della quantità di moto e loro equazioni di bilancio	50
2.11	Energia cinetica e moto attorno al baricentro	52
2.12	Lavoro di un sistema di forze, teorema delle forze vive	53
2.13	Forze conservative e conservazione dell'energia meccanica	54
2.14	Dinamica nei riferimenti non inerziali	56
2.15	Baricentro, quantità di moto e momento angolare di un corpo rigido	57
2.16	Energia cinetica di un corpo rigido	60
2.17	Base centrale d'inerzia e calcolo del momento angolare e dell'energia cinetica	61
2.18	Significato geometrico delle matrici d'inerzia	63
2.19	Schematizzazione delle forze che agiscono su un corpo rigido	66
2.20	Equazioni cardinali per un corpo rigido	68
2.21	Potenza delle forze applicate ad un corpo rigido	69
2.22	Corpo rigido con un asse fisso privo d'attrito	71
2.23	Corpo rigido con un punto fisso privo di attrito	73
2.24	Corpo rigido libero	75
3	Meccanica Analitica: formulazione lagrangiana	79
3.1	Introduzione	79
3.2	Coordinate lagrangiane	80
3.3	Velocità ed accelerazione lagrangiane	84
3.4	Spostamenti possibili e virtuali	85
3.5	Primo e secondo teorema di D'Alembert-Lagrange	87
3.6	Le equazioni di Lagrange	90
3.7	Sollecitazioni conservative	94
3.8	Funzione di Lagrange o lagrangiana	96
3.9	Integrali primi delle equazioni del moto	96
3.10	Teorema di Noether	97

3.11	Equilibrio, stabilità e piccole oscillazioni	100
3.12	Principio di Hamilton, prima forma	105
4	Meccanica Analitica: formulazione hamiltoniana	109
4.1	Derivazione delle equazioni di Hamilton	111
4.2	Conservazione dell'energia totale	112
4.3	Le parentesi di Poisson	113
4.4	Integrali primi del moto e proprietà delle parentesi di Poisson	113
4.5	Trasformazioni canoniche	114
4.6	Equazione di Hamilton–Jacobi	121
A	Curve regolari	127
B	Funzioni isotrope	135
C	Approfondimenti sui sistemi di vettori e di geometria delle masse	137
C.1	Equipollenza di due sistemi di vettori	137
C.2	Assi d'inerzia	138
D	Le leggi di Keplero	141
E	Moti per inerzia	151
F	Funzioni implicite e forme differenziali	161

Considerazioni di carattere generale

La Meccanica Razionale è una parte della Fisica Matematica. Quest'ultima è quella disciplina scientifica che si propone di descrivere in termini matematici rigorosi i fenomeni fisici. Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia), ad esempio, nella prefazione al suo *Traité de Mécanique Analytique*, esplicita la sua visione della Meccanica come una branca della Matematica fondata su principi fisici. Questo significa che la Fisica Matematica, in ogni suo settore, mette a fondamento degli assiomi generali di origine sperimentale, a partire dai quali ricava, con procedimenti logico-deduttivi tipici delle discipline matematiche, delle teorie o nei casi più semplici dei modelli. L'adeguatezza delle teorie e dei modelli viene giudicata in base a quanto bene essi sappiano cogliere gli aspetti fondamentali dei fenomeni fisici che si prefiggono di descrivere, mediante un confronto tra i risultati previsti dal modello e quelli derivanti dall'osservazione dei fenomeni.

La Meccanica Razionale, in particolare, ha per oggetto lo studio del moto dei corpi naturali. Seguendo il pensiero di Carlo Cercignani, possiamo senz'altro affermare che “è inutile sottolineare l'importanza dell'insegnamento della Meccanica Newtoniana per i matematici: bisognerebbe ignorare completamente la storia della scienza per non riconoscere che l'influenza più felice e duratura sullo sviluppo della matematica è provenuta dallo studio di problemi concreti ed in particolare dalla necessità di fondare e sviluppare i concetti relativi al movimento ed alle sue cause”.

La Meccanica classica è un esempio fondamentale del metodo scientifico di organizzare una complessa raccolta di informazioni in dei principi unificanti teoricamente rigorosi. In questo senso rappresenta una delle forme più alte di modellizzazione. L'eleganza e la profondità del pensiero teorico accoppiate alle sue applicazioni in ogni campo la rendono confrontabile, nelle scienze applicate, alla geometria di Euclide. Ha un valore fondazionale paragonabile

al calcolo, sia come linguaggio fondamentale delle scienze applicate che come catalizzatrice di nuovi concetti e scoperte.

Le applicazioni della Meccanica razionale sono innumerevoli e sono alla base di tutti i dispositivi meccanici (elettro-meccanici) che influenzano la vita moderna essenzialmente in tutti i suoi aspetti pratici. Si pensi, ad esempio, alla meccanica dei robot, oppure alla fisica dell'animazione digitale che implica l'introduzione delle leggi della fisica in un motore grafico (che è il nucleo software di un videogioco o di qualsiasi altra applicazione con grafica in tempo reale), particolarmente nella computer grafica 3D, allo scopo di rendere gli effetti più realistici per l'osservatore. In genere, la fisica usata nella simulazione è una buona approssimazione della fisica reale e i calcoli sono eseguiti utilizzando valori discreti. Nella simulazione si usano tra le altre la dinamica dei corpi rigidi, quella dei corpi deformabili e la rilevazione delle collisioni, che è usata per determinare quando le traiettorie di due o più oggetti fisici si incrociano.

I problemi della Meccanica Razionale, come quelli di tutta la Fisica e della Scienza in genere, sono semplificazioni di problemi reali. La semplificazione è essenziale per la comprensione. Ad esempio non è pensabile ritenere inutile la meccanica dei corpi rigidi perché nessun corpo in natura è rigido. La schematizzazione di un corpo come rigido è una prima fase nello studio di un problema meccanico. Solo dopo si terrà conto della deformabilità dei corpi o anche di altre proprietà che ne influenzano il moto. Più un modello rispecchia le proprietà di un corpo, maggiormente il moto del corpo ideale approssimerà quello del corpo reale. D'altra parte la struttura formale risulterà più complicata e quindi la derivazione di risultati concreti sarà meno agevole o addirittura impossibile. Risulta evidente come sia necessario trovare un compromesso che consiste nel tener conto solo delle proprietà che influenzano il moto di un corpo in maniera più rilevante, le quali dipendono dal problema in considerazione.

Cominceremo con lo studio della Cinematica, che tratta l'evoluzione dei caratteri geometrici del moto dei corpi in un prefissato sistema di riferimento. Più precisamente, essa si occupa di descrivere come variano nel tempo le proprietà geometriche delle figure che vengono usate per rappresentare i corpi in movimento, e per tale ragione è anche detta geometria del movimento.

Passeremo poi alla Dinamica, che ha per oggetto lo studio del moto dei corpi naturali in relazione alle cause che lo determinano. Vale a dire che la Dinamica si occupa tanto della deduzione del moto dei corpi note le cause, quanto della determinazione delle cause supposto che il moto sia noto. La Dinamica comprende quindi la Statica che ha per oggetto la determinazione delle circostanze nelle quali i corpi si mantengono in quiete.

Capitolo 1

Cinematica dei punti materiali e dei corpi rigidi

1.1 Riferimenti spazio-temporali della cinematica classica

In generale, il moto di un corpo naturale appare diverso ad osservatori diversi. Per studiare un moto, o più in generale un fenomeno fisico, un osservatore ha bisogno di un corpo di riferimento S , suddividibile in parti "piccole" dette punti. Con uno di questi punti, detto O , l'osservatore si identifica ed in ognuno di essi pone un orologio. Gli orologi, tutti identici, sono dispositivi arbitrari atti a definire una variabile reale, continua e crescente che viene chiamata *tempo locale* t . Assumeremo il tempo come un concetto primitivo rinunciando ad ogni ulteriore indagine critica su di esso.

Un altro concetto primitivo è quello di evento, con il quale intenderemo qualcosa che accade. Gli eventi che accadono in uno stesso punto di S , si possono ordinare associandoli agli istanti in cui si verificano, valutati con l'orologio posto in quel punto. Invece, per decidere se un evento che accade in un punto è anteriore, simultaneo o posteriore ad un evento che si verifica in un altro punto è necessario introdurre un concetto di sincronismo.

Se si pongono in un punto di S orologi identici e sincroni, in *cinematica classica*, si assume che essi restino sincroni anche dopo averli distribuiti in punti diversi di S . Si ammette cioè il

Postulato C 1 *L'andamento di un orologio è indipendente dal suo moto.*

In tal modo è possibile definire un tempo pantopico, ovvero che è lo stesso in ogni punto di S . Si ammette anche il seguente altro

Postulato C 2 *Esistono corpi di riferimento rigidi, cioè tali che la distanza tra due qualsiasi punti di questi corpi si mantenga costante nel tempo. Questi corpi vengono prolungati idealmente ed indefinitamente con punti fittizi a distanza anch'essa costante. Si costruisce così lo spazio solidale all'osservatore O , che chiameremo \mathcal{E}_3 , e che assumeremo essere uno spazio puntuale affine tridimensionale ed euclideo.*

Dati un corpo rigido S e degli orologi, resta, pertanto, individuato un riferimento spazio-temporale che chiameremo R .

1.2 Punto materiale

Un sistema materiale è un insieme di corpi naturali. Come abbiamo detto, i corpi naturali si suppongono decomponibili in parti che possano essere assimilate a punti di \mathcal{E}_3 . L'insieme dei punti di \mathcal{E}_3 con i quali l'osservatore, ad un certo istante t , rappresenta un corpo si chiama *configurazione* del corpo a quell'istante. Se questa configurazione varia nel tempo si dice che il corpo è in moto nello spazio-tempo di O .

Per descrivere il moto di un corpo dal punto di vista cinematico, bisogna descrivere come varia nel tempo la sua configurazione e quindi anche le velocità e le accelerazioni dei suoi punti. In molti casi una descrizione così accurata risulta inutilmente complicata. Quando infatti le distanze tra i vari punti di un corpo risultano inapprezzabili rispetto alla dimensione della regione di spazio in cui si svolge il moto e le variazioni delle grandezze cinematiche interne sono trascurabili rispetto a quelle esterne, il corpo si può identificare con un suo punto. Si ha in tal caso il cosiddetto modello di *punto materiale*. Quest'ultimo è il modello più semplice di corpo naturale e non ha un interesse solo teorico, ma trova applicazione in molti problemi concreti, poiché in tanti casi si può ritenere sufficientemente individuata la posizione di un corpo mediante quella di un unico suo punto.

Questo accade, ad esempio, in molte questioni astronomiche nelle quali i corpi celesti sono assimilabili a punti mobili, in balistica dove spesso è sufficiente conoscere la traiettoria di un solo punto di un proiettile, nella navigazione dove la posizione di una nave si fissa mediante le coordinate di un suo punto qualsiasi e così via. Alla luce di quanto detto, possiamo dare la seguente

Definizione 1 *Un corpo schematizzabile con un punto dicesi punto materiale e si indica col punto $P \in \mathcal{E}_3$ che lo rappresenta.*

1.3 Equazioni del moto di un punto e traiettoria

In un intervallo di tempo \mathcal{I} , il moto di un punto materiale nello spazio-tempo (\mathcal{E}_3, t) è noto se si conosce l'applicazione

$$P : t \in \mathcal{I} \rightarrow P(t) \in \mathcal{E}_3$$

e si scrive

$$P = P(t). \quad (1.1)$$

Il vettore

$$\mathbf{r}(t) := P(t) - O \quad (1.2)$$

si dice vettore posizione di P all'istante t , rispetto all'osservatore O . Introdotto in \mathcal{E}_3 un riferimento ortonormale levogiro $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$, si ha

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (1.3)$$

dove le x_i , $i = 1, 2, 3$, sono le coordinate di P . Nel seguito adotteremo la convenzione di Einstein secondo la quale il segno di sommatoria viene sottinteso qualora vi siano indici ripetuti, a meno che non sia diversamente specificato. Le (1.1), (1.2) e (1.3) si chiamano equivalentemente equazioni vettoriali finite del moto di P in \mathcal{E}_3 .

Le

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

si dicono invece equazioni cartesiane finite del moto di P in \mathcal{E}_3 .

Le equazioni del moto e l'insieme delle posizioni occupate da P in \mathcal{E}_3 al variare di t definiscono una curva di \mathcal{E}_3 che viene detta traiettoria γ di P .

Se s è l'ascissa curvilinea sulla traiettoria γ , la funzione

$$s = s(t), t \in \mathcal{I}$$

si chiama *legge oraria* del moto di P in \mathcal{E}_3 .

Il vettore \mathbf{r} si può considerare funzione di t tramite s , vale a dire

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(s(t)). \quad (1.4)$$

1.4 Velocità ed accelerazione

Si chiama velocità vettoriale istantanea di P in \mathcal{E}_3 il vettore

$$\mathbf{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}.$$

È facile mostrare che

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i.$$

Dalla (1.4), si ottiene poi

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}'}{ds} \dot{s}(t) = \dot{s}(t) \mathbf{t}, \quad (1.5)$$

dove $\dot{s}(t)$ viene detta velocità scalare istantanea e \mathbf{t} è il versore tangente alla traiettoria nella posizione occupata da P all'istante di tempo t . La precedente relazione mostra che la velocità vettoriale ha come direzione quella della tangente alla traiettoria, per grandezza il valore assoluto della velocità scalare e per verso quello di \mathbf{t} o quello opposto, a seconda del segno di \dot{s} . In particolare il moto di P si dice *progressivo* o *retrogrado* se il segno di $\dot{s}(t)$ è rispettivamente positivo o negativo. Gli istanti in cui $\dot{s}(t)$ si annulla si dicono di arresto. Infine se $\dot{s}(t)$ è costante nell'intervallo \mathcal{I} il moto si dice *uniforme* in questo intervallo.

Si dice accelerazione di P in \mathcal{E}_3 al tempo t il vettore

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 P(t)}{dt^2},$$

che ha la seguente rappresentazione nella base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$

$$\mathbf{a} = \ddot{x}_i(t) \mathbf{e}_i.$$

Tenendo conto della (1.5) e delle formule di Frénet si ha

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}(t) \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \dot{s} = \ddot{s}(t) \mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}, \quad (1.6)$$

dove R è il raggio di curvatura della traiettoria nel punto $P(t)$ ed \mathbf{n} il versore della normale principale.

Vediamo come vengono chiamate le varie quantità che abbiamo introdotto:

- \ddot{s} è detta *accelerazione scalare*,
- $\ddot{s} \mathbf{t}$ si dice *accelerazione tangenziale*,
- $\frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \mathbf{n}$ rappresenta l'*accelerazione centripeta*.

Dalla relazione (1.6) si può notare che l'accelerazione è puramente tangenziale quando $R = \infty$, ovvero nei moti rettilinei, mentre risulta puramente centripeta nei moti uniformi ($\dot{s} = cost$).

Infine, un moto si definisce accelerato o ritardato a seconda che il modulo della velocità sia crescente o decrescente. Mentre si dice uniformemente vario se $\ddot{s} = cost$ in \mathcal{I} .

Nel seguito studieremo moti che siano continui, senza urti, né brusche variazioni di accelerazione, questo da un punto di vista matematico equivale a supporre che la funzione $P = P(t)$ sia di classe C^2 .

1.5 Moti piani

Il moto di un punto materiale P si definisce piano se la sua traiettoria giace su un piano. Nello studio dei moti piani è spesso utile introdurre le coordinate polari (ρ, φ) di centro O ed asse polare x_1 . Se consideriamo le curve coordinate, ovvero le curve di equazioni $\varphi = cost$ e $\rho = cost$, possiamo notare che esse sono rispettivamente le semirette uscenti dall'origine e le circonferenze di centro O . Il riferimento $\{P, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi\}$, dove \mathbf{e}_ρ ed \mathbf{e}_φ sono i versori tangenti alle due curve coordinate passanti per P , si chiama riferimento naturale associato, nel punto P , alle coordinate polari. Esso dipende quindi dal punto P che si considera.

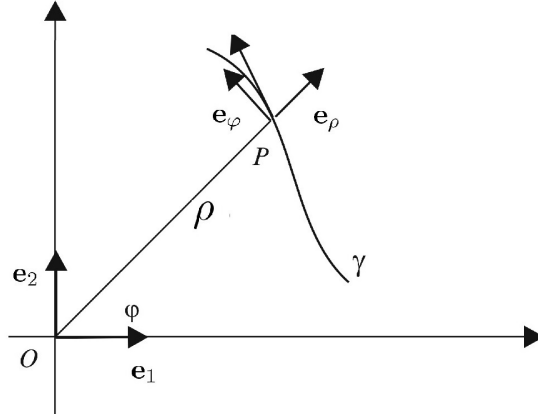


Figura 1.1: Riferimento naturale associato, nel punto P , alle coordinate polari.

Si ha:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2. \quad (1.7)$$

Il vettore posizione in coordinate polari si scrive

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho,$$

per cui la velocità, nella base del riferimento naturale associato nel punto P alle coordinate polari, si scrive:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

essendo

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Gli scalari

$$v_\rho := \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\rho = \dot{\rho} \quad \text{e} \quad v_\varphi := \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \rho \dot{\varphi}$$

si chiamano rispettivamente velocità radiale e trasversa.

Per quanto riguarda l'accelerazione, si ha

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi,$$

essendo

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} = (-\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho.$$

Pertanto, l'accelerazione radiale e trasversa sono date, rispettivamente, da

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \quad \text{e} \quad a_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}).$$

Per ovvie ragioni $\dot{\varphi}$ è detta velocità angolare del punto P attorno ad O .

Supponiamo, senza perdere di generalità, che il moto di P avvenga in senso antiorario, e consideriamo l'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$, il punto P in tale intervallo spazza un'area $\Delta A(t)$ tale che

$$\frac{1}{2} \rho^2(\bar{t}) \Delta \varphi \leq \Delta A(t) \leq \frac{1}{2} \rho^2(\bar{\bar{t}}) \Delta \varphi,$$

dove \bar{t} rappresenta l'istante compreso nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ nel quale P si trova a distanza massima da O , mentre $\bar{\bar{t}}$ è quello in cui si trova a distanza minima.

Dividendo ogni membro della disuguaglianza per Δt (ricordando che per $\Delta t < 0$ bisogna cambiare il verso delle disuguaglianze) e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, si ha

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} \rho^2(t) \dot{\varphi}.$$

$\dot{A}(t)$ si chiama velocità areale (o areolare) di P intorno ad O .

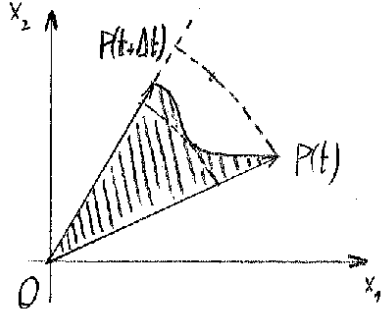


Figura 1.2: Velocità areale

1.6 Moto circolare e moto armonico

Il moto di un punto P si definisce *circolare* se esso si muove lungo una circonferenza γ di raggio r , che supporremo per semplicità di centro O e giacente nel piano Ox_1x_2 . Assumiamo come origine delle ascisse curvilinee l'intersezione A tra la circonferenza ed il semiasse delle x_1 positive, allora

$$s(t) = r\varphi(t).$$

Pertanto la velocità è

$$\mathbf{v} = r\dot{\varphi}(t)\mathbf{t},$$

e l'accelerazione

$$\mathbf{a} = r\ddot{\varphi}(t)\mathbf{t} + r\dot{\varphi}^2\mathbf{n}. \quad (1.8)$$

Se, in particolare, il moto è circolare uniforme, ovvero $\ddot{s} = 0$ o equivalentemente $\ddot{\varphi} = 0$, allora dalla (1.8) si ha

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r},$$

con

$$\omega := \dot{\varphi},$$

velocità angolare, che per un moto uniforme è costante. Dall'integrazione rispetto al tempo dell'ultima equazione, si ottiene

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

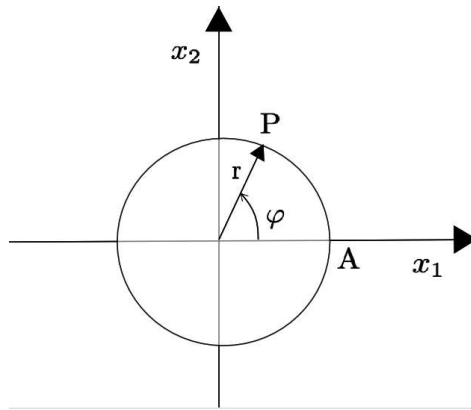


Figura 1.3: Moto circolare

φ_0 essendo il valore dell'anomalia all'istante $t = 0$.
Questo moto è periodico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|},$$

in quanto

$$\varphi\left(t + \frac{2\pi n}{|\omega|}\right) = \omega t \pm 2\pi n + \varphi_0 = \varphi(t) \pm 2\pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

dove va preso il segno $+$ o quello $-$ a seconda che $\omega > 0$ oppure $\omega < 0$.
Assumiamo, adesso, per semplicità, che il moto avvenga in senso antiorario di modo che $\omega > 0$, si dice moto *armonico* il moto della proiezione di P sull'asse x_1 (o su una qualsiasi altra retta per O). L'equazione cartesiana finita di questo moto è quindi

$$x_1 = r \cos(\varphi(t)) = r \cos(\omega t + \varphi_0),$$

con velocità ed accelerazione date da

$$\dot{x}_1 = -\omega r \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 r \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x_1.$$

Anche il moto armonico è periodico, con lo stesso periodo del moto circolare uniforme, in quanto agli istanti $t + \frac{2\pi n}{\omega}$, x_1 ed \dot{x}_1 sono le stesse che all'istante t , $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Le quantità r , ω e φ_0 sono dette, rispettivamente, ampiezza, pulsazione (o frequenza angolare) e costante di fase del moto armonico. La quantità

$$\nu := \frac{\omega}{2\pi}$$

rappresenta il numero di oscillazioni complete nell'unità di tempo ed è detta frequenza.

Notiamo che un moto armonico soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti ed omogenea

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Viceversa si può mostrare che ogni soluzione di questa equazione differenziale rappresenta un moto armonico. Infatti l'equazione caratteristica ad essa associata ha soluzioni

$$\lambda = \pm i\omega,$$

con i unità immaginaria, pertanto l'integrale generale della (1.6) è

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

che per le formule di Eulero diventa

$$x(t) = (c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

da cui, ponendo $A = r \cos \varphi_0$ e $B = -r \sin \varphi_0$ si dimostra l'asserto.

1.7 Moti composti

Supponiamo di avere n punti, P_1, \dots, P_n , in moto nello spazio dell'osservatore O . Il moto di P si dice *composto* degli n moti di P_1, \dots, P_n se accade che

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i(t),$$

dove \mathbf{r}_i è il vettore posizione di P_i , $i = 1, \dots, n$. I moti dei punti P_i , $i = 1, \dots, n$, si dicono moti componenti. Per un moto composto si ha

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i(t),$$

con ovvio significato dei simboli.

Dati tre 3 assi r_1, r_2 ed r_3 , non complanari ed uscenti da un punto A , il

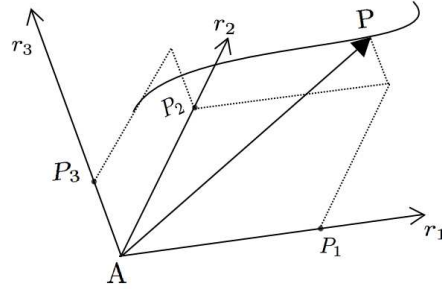


Figura 1.4: Decomposizione di un moto lungo tre assi

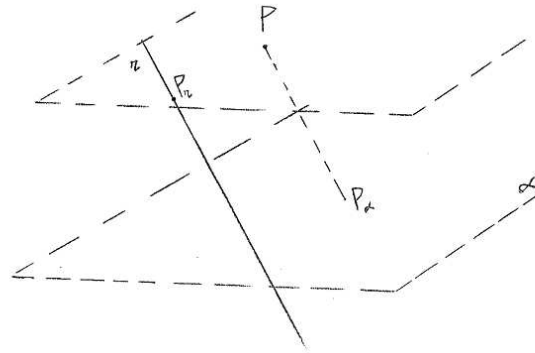


Figura 1.5: Decomposizione di un moto su un piano ed un asse

moto di un punto P si può sempre considerare come composto di tre moti rettilinei lungo i suddetti assi. Esattamente dei tre moti dei punti P_1 , P_2 e P_3 che si ottengono intersecando r_1 con il piano che contiene P ed è parallelo ad r_2 ed r_3 , r_2 con il piano per P parallelo ad r_1 ed r_3 , ed infine r_3 con il piano parallelo ad r_1 ed r_2 , vedi Figura 1.4.

In maniera analoga, se si considerano un piano α ed una retta r ad esso non parallela, il moto di un punto P si può decomporre in un moto piano su α ed uno rettilineo su r , come in Figura 1.5 .

1.8 Moti elicoidali

Nello spazio \mathcal{E}_3 siano α un piano ed r una retta ad esso ortogonale. Sia P_1 un punto in moto lungo la circonferenza di α avente come centro l'intersezione tra il piano e la retta e come raggio R . Sia P_2 un punto in moto lungo r . Scegliamo in \mathcal{E}_3 un riferimento ortonormale levogiro $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$ tale che il piano $x_3 = 0$ sia sovrapposto ad α e l'origine coincida con l'intersezione tra α ed r .

Consideriamo il moto composto dei moti dei punti P_1 e P_2 vale a dire il moto del punto P tale che

$$P - O = (P_1 - O) + (P_2 - O).$$

Siano ρ, φ , ed x_3 le coordinate cilindriche di P , le equazioni finite del moto di P in queste coordinate ed in coordinate cartesiane sono rispettivamente

$$\begin{cases} \rho = R, \\ \varphi = \varphi(t), \\ x_3 = x_3(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = R \cos \varphi(t), \\ x_2 = R \sin \varphi(t), \\ x_3 = x_3(t), \end{cases}$$

e quindi le componenti cartesiane delle velocità sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -R\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), \\ \dot{x}_2 = R\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), \\ \dot{x}_3 = \dot{x}_3(t). \end{cases}$$

La traiettoria di P giace sulla superficie laterale del cilindro retto di raggio R ed asse x_3 . Vediamo sotto quali condizioni questa traiettoria è un'elica, nel qual caso il moto di P si dice elicoidale. Dobbiamo quindi mostrare quali sono le condizioni che assicurano che l'angolo tra la tangente alla traiettoria in un suo punto e la generatrice del cilindro passante per quel punto rimanga costante al variare del punto.

Proprietà 1 *Il moto di P è elicoidale se e solo se il rapporto tra $\dot{\varphi}$ e \dot{x}_3 è costante nel tempo.*

Dimostrazione. Essendo il moto di P composto dei moti di P_1 e P_2 , si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \dot{P}, \quad \mathbf{v}_1 = \dot{P}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \dot{P}_2.$$

Inoltre \mathbf{v}_1 è parallela ad α e \mathbf{v}_2 ad \mathbf{e}_3 . L'angolo che la velocità forma con la generatrice (che è parallela ad \mathbf{e}_3) è uguale all'angolo che \mathbf{v} forma con \mathbf{v}_2 . Detto θ quest'angolo, si ha

$$|\tan \theta| = \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{\sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2}}{|\dot{x}_3|} = \frac{R|\dot{\varphi}|}{|\dot{x}_3|},$$

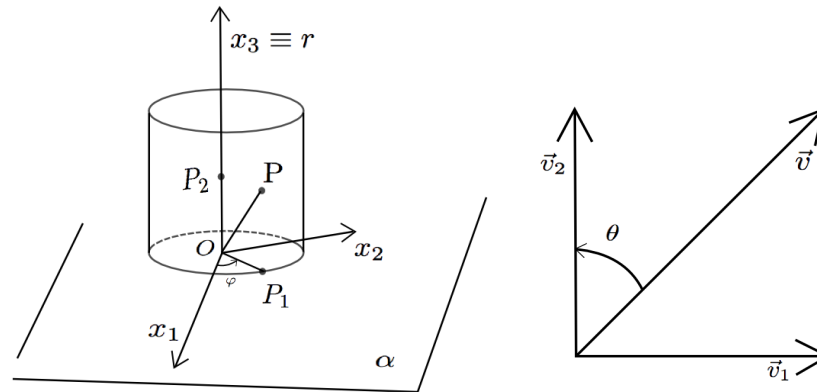


Figura 1.6: Moto elicoidale

da cui segue la dimostrazione della proprietà. Un secondo risultato è costituito dalla seguente

Proprietà 2 *Il moto di P è elicoidale uniforme se e solo se ciascuno dei moti componenti è uniforme.*

Dimostrazione. Infatti

$$|\dot{s}(t)| = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} = \sqrt{R^2(\dot{\varphi})^2 + (\dot{x}_3)^2} = \sqrt{R^2 + h^2}|\dot{\varphi}|,$$

con $h := \frac{\dot{x}_3}{\dot{\varphi}}$ costante, da cui la tesi.

1.9 Cambiamento di riferimento

Uno dei problemi centrali della cinematica classica è quello di determinare le relazioni tra le misure dei tempi, delle lunghezze e delle altre grandezze cinematiche (velocità, accelerazioni, etc.) effettuate da due osservatori O ed O' in moto l'uno rispetto all'altro.

Siano rispettivamente (\mathcal{E}_3, t) ed (\mathcal{E}'_3, t') gli spazi-tempo dei due osservatori. Per risolvere il suddetto problema bisogna trovare il legame tra (P, t) , punto di \mathcal{E}_3 ed istante del tempo di O , e (P', t') , punto di \mathcal{E}'_3 ed istante del tempo di O' , che i due osservatori associano ad un medesimo evento, vale a dire determinare la trasformazione invertibile

$$\begin{aligned} P &= f_1(P', t'), \\ t &= f_2(P', t'). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda parte della trasformazione, si può pensare che i due riferimenti siano muniti di orologi identici, pertanto in accordo con il postulato C1 si avrà

$$t = at' + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

se O ed O' adottano differenti unità di misura ed origine dei tempi, o più semplicemente

$$t = t',$$

se si mettono d'accordo anche sull'unità di misura e sull'origine dei tempi. Per completare la determinazione della trasformazione occorre introdurre un ulteriore

Postulato C3 *Ad ogni istante di tempo t , la trasformazione f_1 conserva la distanza spaziale tra eventi, vale a dire è un'isometria tra \mathcal{E}'_3 ed \mathcal{E}_3 :*

$$d(f_1(A', t'), f_1(B', t')) = d(A', B'), \quad \forall t' \in \mathbb{R}, \forall A', B' \in \mathcal{E}'_3.$$

Un risultato molto importante è rappresentato dal seguente

Teorema 1 *Ad ogni istante, f_1 è un'isometria tra \mathcal{E}'_3 ed \mathcal{E}_3 se e solo se essa è del tipo*¹

$$f_1(P') = f_1(\Omega') + \mathbf{Q}(P' - \Omega'), \quad \forall P' \in \mathcal{E}'_3, \quad (1.9)$$

dove Ω' è un punto arbitrario di \mathcal{E}'_3 e $\mathbf{Q} : E'_3 \rightarrow E_3$ (E'_3 ed E_3 rappresentano gli spazi vettoriali a cui sono associati \mathcal{E}'_3 e \mathcal{E}_3) è una trasformazione ortogonale indipendente da Ω' ($\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = I$, con \mathbf{Q}^T applicazione trasposta di \mathbf{Q} ed I applicazione identica.)

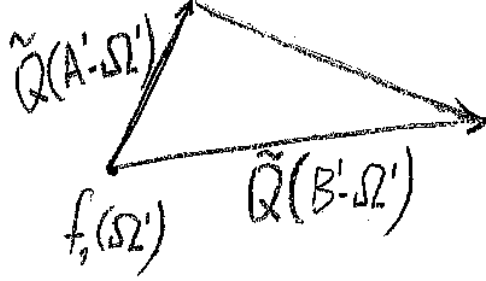
Dimostrazione: (Parte sufficiente). Se A e $B \in \mathcal{E}_3$ sono i punti che corrispondono ad A' e B' secondo la (1.9), si ha

$$d(A, B) = d(f_1(\Omega') + \mathbf{Q}(A' - \Omega'), f_1(\Omega') + \mathbf{Q}(B' - \Omega')),$$

e poiché in uno spazio puntuale affine euclideo la distanza tra due punti coincide con il modulo del vettore ad essi corrispondente, segue

$$\begin{aligned} d(A, B) &= |\mathbf{Q}(B' - \Omega') - \mathbf{Q}(A' - \Omega')| = |\mathbf{Q}(B' - A')| \\ &= \sqrt{\mathbf{Q}(B' - A') \cdot \mathbf{Q}(B' - A')} = \sqrt{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}(B' - A') \cdot (B' - A')} \\ &= |B' - A'| = d(A', B'). \end{aligned}$$

¹Per semplicità di scrittura si è omessa la dipendenza da t' , in quanto si sta considerando un istante fissato



(Parte necessaria). Viceversa, sia $f_1 : \mathcal{E}'_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ un'isometria. Fissato $\Omega' \in \mathcal{E}'_3$, definiamo la seguente applicazione $\mathbf{Q} : E'_3 \rightarrow E_3$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{v}') := f_1(P') - f_1(\Omega'), \quad \forall \mathbf{v}' \in E'_3, \quad \text{con } P' \text{ tale che } P' - \Omega' = \mathbf{v}'.$$

Questa applicazione conserva il modulo dei vettori, poiché

$$|\mathbf{Q}(\mathbf{v}')| = d(f_1(P'), f_1(\Omega')) = d(P', \Omega') = |\mathbf{v}'|, \quad \forall \mathbf{v}' \in E'_3.$$

Si può mostrare che l'applicazione così definita conserva anche il prodotto scalare. Infatti, dati due qualsiasi vettori \mathbf{u}' e $\mathbf{v}' \in E'_3$ e $\mathbf{w}' = \mathbf{v}' - \mathbf{u}'$, si ha

$$|\mathbf{w}'|^2 = |\mathbf{v}' - \mathbf{u}'|^2 = (\mathbf{v}' - \mathbf{u}') \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{u}') = |\mathbf{u}'|^2 + |\mathbf{v}'|^2 - 2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}',$$

da cui si ottiene la formula di Carnot

$$2\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' = |\mathbf{w}'|^2 - |\mathbf{u}'|^2 - |\mathbf{v}'|^2.$$

Allora se (\mathbf{e}'_i) è una base ortonormale di E'_3 , $(\mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i))$ è una base ortonormale di E_3 . Se $\mathbf{v} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}')$, le componenti di \mathbf{v} nella base $(\mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i))$ risultano

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{Q}(\mathbf{v}') \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_i,$$

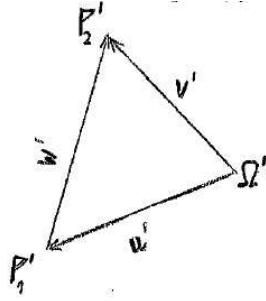
per cui

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i) = (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{Q}(\mathbf{e}'_i),$$

e

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}') = \mathbf{Q}\left(\sum (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i\right).$$

Se confrontiamo le ultime due relazioni ne segue la linearità di \mathbf{Q} , che è quindi una trasformazione ortogonale (in quanto conserva il prodotto scalare).



Rimane da provare che \mathbf{Q} è indipendente dal punto $\Omega' \in \mathcal{E}'_3$ che è stato scelto. Si prenda un altro punto $\Omega'_1 \in \mathcal{E}'_3$ e sia P'_1 tale che

$$\mathbf{v}' = P' - \Omega' = P'_1 - \Omega'_1,$$

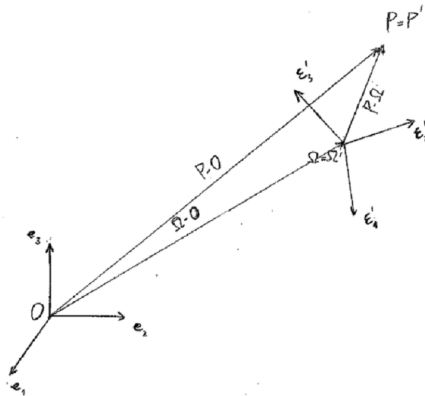
allora l'applicazione corrispondente a Ω'_1 sarà

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1(\mathbf{v}') &= f_1(P'_1) - f_1(\Omega'_1) = f_1(P'_1) - f_1(\Omega') - (f_1(\Omega'_1) - f_1(\Omega')) \\ &= \mathbf{Q}(P'_1 - \Omega') - \mathbf{Q}(\Omega'_1 - \Omega') = \mathbf{Q}(P'_1 - \Omega'_1) = \mathbf{Q}(\mathbf{v}'), \quad \forall \mathbf{v}' \in E'_3, \end{aligned}$$

vale a dire $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}$, che è quanto rimaneva da provare.

Il teorema precedente consente di trovare la relazione tra le coordinate di P' nel riferimento $\{\Omega', (\epsilon'_i)\}$ di \mathcal{E}'_3 , e le coordinate del punto corrispondente $P = f_1(P')$ nel riferimento $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$ di \mathcal{E}_3 .

Sia (Q_{ij}) la matrice che rappresenta l'applicazione $\mathbf{Q} : E'_3 \rightarrow E_3$ nelle basi



(ϵ'_i) ed (\mathbf{e}_i) , dei due osservatori Ω' ed O , per la (1.9) si ha

$$f_1(P') = f_1(\Omega') + \mathbf{Q}(P' - \Omega'),$$

da cui

$$(f_1(P') - O) = (f_1(\Omega') - O) + \mathbf{Q}(P' - \Omega')$$

e quindi

$$x_i \mathbf{e}_i = x_{\Omega_i} \mathbf{e}_i + \mathbf{Q} x'_j \epsilon'_j = x_{\Omega_i} \mathbf{e}_i + x'_j Q_{ij} \mathbf{e}_i,$$

essendo

$$\mathbf{Q} \epsilon'_j = Q_{ij} \mathbf{e}_i = \epsilon_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Questo significa che gli elementi della j^{ma} colonna della matrice (Q_{ij}) , che rappresenta l'applicazione \mathbf{Q} quando per E_3 ed E'_3 si scelgano rispettivamente le basi (\mathbf{e}_i) ed (ϵ'_i) , sono i coseni direttori di ϵ_j rispetto agli assi di $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$. Dall'espressione precedente discendono le relazioni che cercavamo

$$x_i = x_{\Omega_i} + Q_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.10)$$

Q_{ij} e x_{Ω_i} possono dipendere dal tempo, infatti le considerazioni precedenti sono state fatte ad un istante di tempo prefissato.

La trasformazione inversa è data da

$$\begin{aligned} Q_{ij} x'_j &= x_i - x_{\Omega_i}, \\ x'_j &= (Q^T)_{ji} x_i - (Q^T)_{ji} x_{\Omega_i} = (Q^T)_{ji} x_i + x'_{O_j}, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza si sono sfruttate le (1.10) riscritte per il punto O (di coordinate $x_i = 0, i = 1, 2, 3$, in $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$) e poi risolte rispetto a $x'_{O_j}, j = 1, 2, 3$,

$$x'_{O_j} = -(Q^T)_{ji} x_{\Omega_i}.$$

1.10 Moto di un corpo rigido

Si è già data la definizione di corpo rigido. In questo paragrafo si mostrerà come i risultati di quello precedente consentano di descrivere, da un punto di vista cinematico, il moto di un corpo rigido S rispetto ad un riferimento R , che chiameremo riferimento fisso.

Infatti, vista la rigidità del corpo, si può scegliere un riferimento rigido R' solidale ad S , pertanto i punti del corpo hanno coordinate costanti in un sistema $\{\Omega', (\epsilon'_i)\}$ di questo riferimento solidale. Ne viene che per determinare le equazioni del moto dei punti di S nel riferimento R

$$x_i = x_{\Omega_i} + Q_{ij} x'_j, \quad (1.11)$$

è sufficiente assegnare le funzioni $x_{\Omega_i}(t)$ e $Q_{ij}(t)$, che forniscono rispettivamente la posizione in $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$ dell'origine Ω e l'orientazione della terna solidale (\mathbf{e}'_i) rispetto alla terna (\mathbf{e}_i) .

Poiché Q_{ij} è una matrice ortogonale, che soddisfa le 6 condizioni

$$Q_{ih}Q_{jh} = \delta_{ij}, \quad \begin{cases} i = j = 1; & i = j = 2; & i = j = 3; \\ i = 1, j = 2; & i = 1, j = 3; & i = 2, j = 3; \end{cases} \quad (1.12)$$

i suoi elementi indipendenti sono 3 e quindi in definitiva è sufficiente assegnare 6 funzioni scalari di t per individuare la configurazione di S .

Si noti che le condizioni (1.12) lasciano indeterminato il segno delle quantità Q_{ij} (nel senso che se le Q_{ij} le soddisfano, anche le $-Q_{ij}$ lo fanno), che risulta tuttavia determinato dalla ulteriore condizione $\det(Q_{ij}) = 1$ che deve essere soddisfatta se sia la terna solidale che quella fissa vengono scelte levogire.

Naturalmente i parametri da specificare per individuare la configurazione di un corpo che non sia sottoposto ad altri vincoli oltre a quello di rigidità si possono scegliere in tanti modi diversi. Si può pensare, ad esempio, di considerare 3 punti P_1, P_2 e P_3 non allineati di S . Allora, per individuare

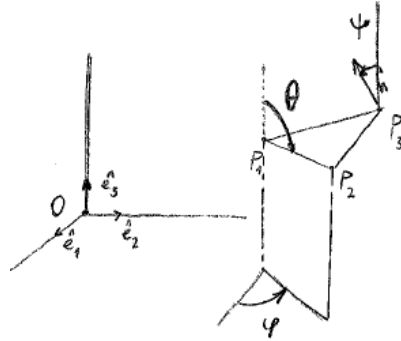


Figura 1.7: Gradi di libertà di un corpo rigido

la posizione di P_1 , l'osservatore O ha bisogno di 3 parametri, ad esempio delle coordinate cartesiane di P_1 o di quelle polari. Per P_2 , giacendo questo sulla sfera di centro P_1 e raggio $|P_2 - P_1|$, sono necessari altri 2 parametri, ad esempio l'angolo θ tra $P_2 - P_1$ ed \mathbf{e}_3 (vedi Figura) e l'angolo φ tra la proiezione di $P_2 - P_1$ sul piano Ox_1x_2 ed il versore \mathbf{e}_1 . Poiché P_3 giace sulla circonferenza di centro la proiezione ortogonale di P_3 sull'asse passante per P_1 e P_2 e raggio uguale alla distanza di P_3 da quest'asse, per individuare la

sua posizione occorre un solo parametro, quale ad esempio l'angolo ψ che la normale \mathbf{n} al triangolo $P_1P_2P_3$ forma con \mathbf{e}_3 . La normale \mathbf{n} è orientata in modo che un osservatore posto in P_3 lungo (P_3, \mathbf{n}) , guardando P_1 veda P_2 alla sua sinistra. Una volta individuata la configurazione del triangolo $P_1P_2P_3$, restano individuate le coordinate di ogni altro punto di S in funzione dei sei parametri scelti, in quanto sono fisse le distanze di ogni altro punto da P_1 , P_2 e P_3 .

Definizione 2 *Il numero di gradi di libertà di un sistema materiale è il numero di variabili indipendenti che occorrono per determinare la sua configurazione.*

Da quanto si è visto in precedenza discendono le

Proprietà 3 *Un punto materiale libero ha 3 gradi di libertà.*

Proprietà 4 *Un corpo rigido libero ha 6 gradi di libertà.*

Proprietà 5 *Un corpo rigido lineare (ad esempio un'asticella molto sottile) ha 5 gradi di libertà.*

Più in generale il moto di un sistema materiale si dice rigido in un intervallo di tempo \mathcal{I} se la distanza tra due suoi punti qualsiasi rimane costante in quell'intervallo. Un corpo che non sia rigido può compiere dei moti rigidi, mentre per definizione tutti i moti di un corpo rigido sono rigidi.

1.11 Formula fondamentale della cinematica di un moto rigido

Definizione 3 *Si chiama atto di moto rigido all'istante t , rispetto all'osservatore O , il campo di velocità dei punti di S in moto rigido, all'istante considerato.*

Derivando la (1.10) rispetto al tempo, tenendo conto che le x'_j , $j = 1, 2, 3$, sono costanti, si ottiene

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{\Omega_i} + \dot{Q}_{ij}(t)x'_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sostituendo nelle precedenti le relazioni

$$x'_j = (Q^T)_{jl}(x_l - x_{\Omega_l}), \quad j = 1, 2, 3,$$

si ricava

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{\Omega_i} + W_{il}(x_l - x_{\Omega_l}), \quad \text{con} \quad W_{il} := \dot{Q}_{ij}(Q^T)_{jl}.$$

Proprietà 6 L'applicazione $\mathbf{W} := \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T : E_3 \rightarrow E_3$ è antisimmetrica.

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo la condizione di ortogonalità

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \text{ con } \mathbf{I} \text{ applicazione identica,}$$

si ottiene

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{0}, \text{ con } \mathbf{0} \text{ applicazione nulla,}$$

vale a dire

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T.$$

Si supponga adesso che anche il riferimento $\{\Omega', (\epsilon'_i)\}$ sia levogiro in modo che $\det(\mathbf{Q}) = 1$, vale a dire \mathbf{Q} sia un'applicazione ortogonale propria (rotazione). Vale la

Proprietà 7 A \mathbf{W} si può associare uno ed un solo vettore $\boldsymbol{\omega}$ (più precisamente uno pseudovettore) per cui risulti

$$\mathbf{W}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in E_3, \quad (\mathbf{W} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T : E_3 \rightarrow E_3).$$

Nella base (\mathbf{e}_i) la relazione da dimostrare si scrive

$$\begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 u_3 - \omega_3 u_2 \\ \omega_3 u_1 - \omega_1 u_3 \\ \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1 \end{pmatrix},$$

da cui si ricavano le seguenti equazioni

$$(W_{12} + \omega_3)u_2 + (W_{13} - \omega_2)u_3 = 0,$$

$$(W_{12} + \omega_3)u_1 - (W_{23} + \omega_1)u_3 = 0,$$

$$(W_{13} - \omega_2)u_1 + (W_{23} + \omega_1)u_2 = 0.$$

Queste ultime possono essere soddisfatte $\forall u_1, u_2, u_3$ se e solo se

$$\omega_1 = -W_{23},$$

$$\omega_2 = W_{13},$$

$$\omega_3 = -W_{12}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ così definito si chiama *velocità angolare* per ragioni che risulteranno chiare nel seguito.

Inoltre l'atto di moto, che risulta definito assegnando \mathbf{v}_Ω e $\boldsymbol{\omega}$ all'istante t , si può scrivere

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_\Omega(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P - \Omega), \quad (1.13)$$

quest'ultima rappresenta la *formula fondamentale della cinematica di un moto rigido*.

Essa è caratteristica dei moti rigidi, infatti se vale (1.13), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |P_1 - P_2|^2 &= 2(\mathbf{v}_{P_1} - \mathbf{v}_{P_2}) \cdot (P_1 - P_2) \\ &= 2[\boldsymbol{\omega} \wedge (P_1 - P_2)] \cdot (P_1 - P_2) = 0, \quad \forall P_1, P_2 \in S, \end{aligned}$$

ovvero la distanza fra due qualsiasi punti del corpo rimane costante nel tempo e quindi il suo moto è rigido.

Il campo di accelerazione si ricava derivando rispetto al tempo la (1.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_\Omega) \\ &= \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - \Omega)] \\ &= \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - \Omega) - |\boldsymbol{\omega}|^2(P - \Omega) + [\boldsymbol{\omega} \cdot (P - \Omega)]\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Mostriamo adesso un altro modo di introdurre il vettore velocità angolare. Si ha

$$P - \Omega = x'_i \boldsymbol{\epsilon}_i,$$

essendo, per quanto visto prima, le componenti di $P - \Omega$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{\epsilon}_i\}_{i=1}^3$ uguali a quelle di $P' - \Omega'$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{\epsilon}'_i\}_{i=1}^3$. Derivando la precedente uguaglianza rispetto al tempo in \mathcal{E}_3 , si ottiene

$$\mathbf{v}_P = x'_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i + \mathbf{v}_\Omega. \quad (1.14)$$

Allora nota \mathbf{v}_Ω , per conoscere la velocità di un qualsiasi punto di S basta conoscere $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$, $i = 1, 2, 3$. Cominciamo con $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1$, decomponendolo rispetto a $(\boldsymbol{\epsilon}_i)$ si ha

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 \right) \boldsymbol{\epsilon}_1 + \left(\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \right) \boldsymbol{\epsilon}_2 + \left(\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 \right) \boldsymbol{\epsilon}_3. \quad (1.15)$$

Si noti che

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\epsilon}_3 \wedge \boldsymbol{\epsilon}_1 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = -\boldsymbol{\epsilon}_2 \wedge \boldsymbol{\epsilon}_1,$$

ed inoltre

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 = 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_1}{dt} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 = -\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_3}{dt}.$$

Sostituendo queste ultime nella (1.15), si ottiene

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \underbrace{\left[\left(\frac{d\epsilon_2}{dt} \cdot \epsilon_3 \right) \epsilon_1 \right]}_{=0} \wedge \epsilon_1 + \left[\left(\frac{d\epsilon_1}{dt} \cdot \epsilon_2 \right) \epsilon_3 \right] \wedge \epsilon_1 + \left[\left(\frac{d\epsilon_3}{dt} \cdot \epsilon_1 \right) \epsilon_2 \right] \wedge \epsilon_1.$$

Definendo

$$\omega = \omega(t) := \left(\frac{d\epsilon_2}{dt} \cdot \epsilon_3 \right) \epsilon_1 + \left(\frac{d\epsilon_3}{dt} \cdot \epsilon_1 \right) \epsilon_2 + \left(\frac{d\epsilon_1}{dt} \cdot \epsilon_2 \right) \epsilon_3,$$

si ricava infine

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \omega \wedge \epsilon_1.$$

Ragionando come sopra, si mostra che valgono anche le

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = \omega \wedge \epsilon_2 \quad \text{e} \quad \frac{d\epsilon_3}{dt} = \omega \wedge \epsilon_3,$$

che assieme alla precedente vengono dette formule di Poisson. Infine, sostituendo le formule di Poisson nella (1.14) si ha

$$\mathbf{v}_P = \omega \wedge x'_i \epsilon_i + \mathbf{v}_\Omega = \omega \wedge (P - \Omega) + \mathbf{v}_\Omega,$$

che è la formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi, pertanto ω è proprio la velocità angolare introdotta prima.

1.12 Teorema di Mozzi

Molto importante è il seguente

Teorema 2 *Se $\omega(t) \neq 0$, all'istante t il luogo dei punti A , di S o solidali ad S , per i quali $\mathbf{v}_A = \lambda(t)\omega(t)$, con λ scalare eventualmente nullo, è una retta $m(t)$ parallela ad ω , che viene detta asse di moto o asse istantaneo di rotazione od anche asse di Mozzi. Inoltre tutti i punti di quest'asse hanno ad ogni istante la stessa velocità $\tau(t)$, che viene detta velocità istantanea di traslazione.*

Dimostrazione. Proviamo, innanzitutto, che se $\omega \neq 0$, due punti $P, Q \in S$ o ad esso solidali hanno la stessa velocità se e solo se la retta per P e Q è parallela ad ω .

Sia $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q$, allora dalla formula fondamentale segue

$$0 = \omega \wedge (P - Q),$$

e quindi $P - Q$ deve essere parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$. Il viceversa è sempre conseguenza della (1.13). Un'ulteriore conseguenza di questa formula è che se due punti hanno velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$, allora hanno la stessa velocità, e quindi per quanto appena mostrato, la retta passante per essi è parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. Il punto $A \in m(t)$ se e solo se $\mathbf{v}_A \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$, il che accade se e solo se

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}_A \wedge \boldsymbol{\omega} \quad \underbrace{=}_{\text{per la (1.13)}} \quad \mathbf{v}_\Omega \wedge \boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega} \wedge (A - \Omega)] \wedge \boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{v}_\Omega \wedge \boldsymbol{\omega} + |\boldsymbol{\omega}|^2 (A - \Omega) - [(A - \Omega) \cdot \boldsymbol{\omega}] \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

È immediato verificare che il punto

$$A^* = \Omega - \frac{\mathbf{v}_\Omega \wedge \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2}, \quad (\boldsymbol{\omega} \neq 0) \quad (1.16)$$

soddisfa l'equazione del luogo dei punti suddetto, che per quanto visto prima è costituito da tutti e soli i punti della retta di equazione parametrica

$$A = A^* + \mu \mathbf{k}(t), \quad \text{con } \mu \text{ che varia in } \mathbb{R}.$$

dove $\mathbf{k}(t) := \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}$. La seconda parte del teorema risulta già provata.

Osservazione 1 *La quantità $\tau_k(t) = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{k}$ è la stessa $\forall P \in S$ o solidale ad S .*

Dimostrazione. $\forall P, Q \in S$, dalla (1.13)

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{k} + [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q)] \cdot \mathbf{k} = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{k}.$$

1.13 Alcuni moti rigidi particolari

1.13.1 Moti traslatori

Un moto di un corpo S rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{e}_i))$ si dice *traslatorio* se, ad ogni istante, tutti i punti di S hanno la stessa velocità

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\tau}(t), \quad \forall P \in S.$$

Valgono le due seguenti proprietà:

1. un moto è traslatorio se e solo se è rigido e $\boldsymbol{\omega}(t) = 0, \quad \forall t$;
2. un moto è traslatorio se e solo se è rigido e Q_{ij} non dipende dal tempo, ovvero se e solo se l'orientazione degli assi $(\Omega, (\boldsymbol{\epsilon}_i))$ rispetto agli assi $(O, (\mathbf{e}_i))$ è costante.

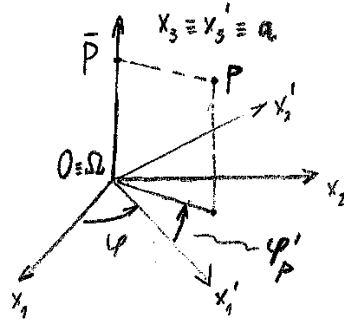


Figura 1.8: Moto rotatorio

La prima proprietà è una conseguenza immediata della (1.13). La seconda risulta dal fatto che

$$\dot{Q}_{ij}Q_{jh}^T = 0, \quad \forall i, h \in \{1, 2, 3\} \iff \dot{Q}_{ij} = 0,$$

infatti, fissato i , dato che $\dot{Q}_{ij}Q_{jh}^T = 0, \forall h = \{1, 2, 3\}$, il vettore che ha \dot{Q}_{ij} come componente j^{ma} deve risultare ortogonale ai tre vettori indipendenti di componenti $j^{\text{me}} Q_{jh}^T, h = \{1, 2, 3\}$, questo implica che il primo vettore deve essere nullo.

Inoltre dati due $\forall P, Q \in S, \dot{P}(t) = \dot{Q}(t) \iff P(t) = Q(t) + (P(t_0) - Q(t_0))$, da cui si evince che in un moto traslatorio tutti i punti di S descrivono traiettorie congruenti, ovvero sovrapponibili e percorse con la medesima legge, vale il viceversa.

La velocità comune dei punti di S , solitamente indicata con $\tau(t)$, è detta velocità di traslazione. Se inoltre τ non dipende dal tempo, il moto è detto traslatorio uniforme. Un moto rigido è traslatorio uniforme se e solo se ogni punto di S si muove di moto rettilineo uniforme.

1.13.2 Moto rotatorio

Un moto rigido si dice rotatorio se esiste un asse solidale a che è fisso in \mathcal{E}_3 .

Notiamo che in un moto rotatorio, ω è parallela ad a , infatti presi due qualsiasi punti P e $Q \in a$, per la (1.13) si ha

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \omega \wedge (P - Q),$$

essendo $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$, da cui la tesi.

Si scelgano le origini Ω ed O , del riferimento solidale e di quello fisso, coincidenti e sull'asse a , inoltre Ox_3 ed Ox'_3 si scelgano coincidenti con l'asse fisso.

Sia φ l'anomalia di Ox'_1 rispetto a Ox_1 . Allora, vedi Figura 1.8,

$$x_i = Q_{ij}x'_j,$$

con

$$(Q_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$(W_{ij}) = (\dot{Q}_{ih}Q_{hj}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3.$$

Detta \bar{P} la proiezione sull'asse a di un qualsiasi punto P di S o solidale ad S , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \underbrace{\mathbf{v}_\Omega}_{=0} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - \Omega) = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 \wedge [(P - \bar{P}) + (\bar{P} - \Omega)] = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 \wedge (P - \bar{P}) \\ &= (\dot{\varphi} |P - \bar{P}|)\mathbf{e}_3 \wedge [\cos(\varphi + \varphi'_P)\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi + \varphi'_P)\mathbf{e}_2] \\ &= \dot{\varphi} |P - \bar{P}| (-\sin(\varphi + \varphi'_P)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi + \varphi'_P)\mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

dove φ'_P è l'anomalia di $(P - \bar{P})$ rispetto a $\bar{P}\boldsymbol{\epsilon}'_1$, che è costante.

Inoltre, dalla formula (1.16), che consente di individuare un punto dell'asse di Mozzi, si ottiene

$$A^* = \Omega + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_\Omega}{|\boldsymbol{\omega}|^2} = \Omega.$$

Da quanto visto sopra discende la seguente

Proprietà 8 *In un moto rotatorio l'asse di Mozzi coincide, ad ogni istante, con l'asse a ed ogni punto del corpo descrive una circonferenza di centro \bar{P} e raggio $|P - \bar{P}|$ con velocità di modulo*

$$|\mathbf{v}_P| = |P - \bar{P}| |\boldsymbol{\omega}|,$$

ed accelerazione

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - \Omega)] \\
 &= \ddot{\varphi} \mathbf{e}_3 \wedge (P - \Omega) + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \wedge [\dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \wedge (P - \Omega)] \\
 &= \ddot{\varphi} |P - \bar{P}| (-\sin(\varphi + \varphi'_P) \mathbf{e}_1 + \cos(\varphi + \varphi'_P) \mathbf{e}_2) - \dot{\varphi}^2 (P - \bar{P}).
 \end{aligned}$$

1.13.3 Moto rototraslatorio

Un moto rigido di un corpo S rispetto al riferimento $(O, (\mathbf{e}_i))$ si dice rototraslatorio se la direzione della velocità angolare è fissa in \mathcal{E}_3 , cioè se $\mathbf{k} := \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}$ non dipende dal tempo. Allora

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{k} \wedge (P - \Omega).$$

Se si introducono un qualsiasi punto \bar{C} fisso in \mathcal{E}_3 ed il vettore (dipendente solo da t)

$$\boldsymbol{\tau}(t) := \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge (\bar{C} - \Omega),$$

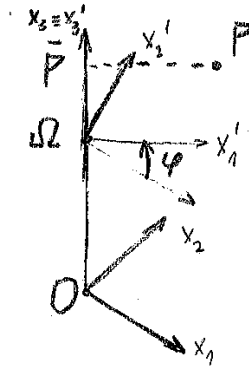
sottraendo membro a membro quest'ultima espressione dalla precedente, si ottiene

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\tau}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P - \bar{C}).$$

La precedente si chiama decomposizione rototraslatoria propria, e mostra come un moto rigido rototraslatorio sia composto di un moto rotatorio attorno ad un asse fisso passante per \bar{C} e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$ e di uno traslatorio. Si noti che di queste decomposizioni ne esistono infinite.

1.13.4 Moto elicoidale

Il moto elicoidale è un caso particolare di moto rototraslatorio, per il quale esiste un asse solidale che scorre lungo un asse a fisso in \mathcal{E}_3 e la velocità di scorrimento $\mathbf{v}_s(t)$ è tale che $|\mathbf{v}_s(t)| = c |\boldsymbol{\omega}(t)|$, $c \in \mathbb{R}$, ($\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $c > 0$). La velocità angolare, per la (1.13) applicata a due punti dell'asse solidale, è parallela ad a , inoltre l'asse istantaneo di rotazione, per il teorema di Mozzi, coinciderà con l'asse solidale e la velocità istantanea di traslazione sarà uguale alla velocità di scorrimento dell'asse solidale rispetto a quello fisso. Prendiamo Ω ed O rispettivamente sull'asse solidale e sull'asse a , e scegliamo come asse $\Omega'x'_3$ il suddetto asse solidale e come asse Ox_3 l'asse a .



Sia φ l'anomalia di $\Omega\mathbf{e}_1$ rispetto a $\Omega\mathbf{e}_1$. Si ha $\mathbf{v}_\Omega = \boldsymbol{\tau}$, e la velocità di un qualsiasi punto P è allora

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - \Omega).$$

Procedendo come nel caso del moto rotatorio si ricava che $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$, mentre dall'espressione per \mathbf{v}_P si trova che per tutti i punti del corpo

$$\dot{x}_3 = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_3,$$

inoltre $\frac{|\dot{\varphi}|}{|\dot{x}_3|} = c = \text{cost}$, quindi il moto di ogni punto è elicoidale.

1.13.5 Moto rigido sferico

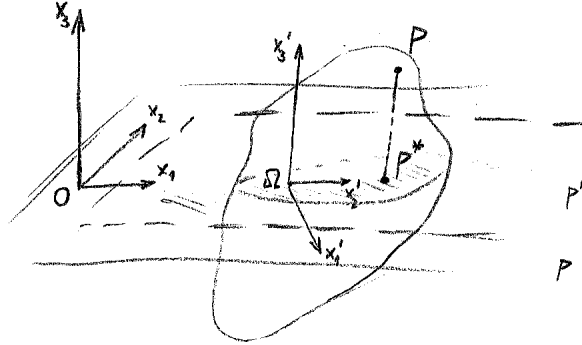
Un moto rigido di un corpo S è detto sferico se durante il moto resta fisso in \mathcal{E}_3 un punto di S (o solidale ad S) che chiamiamo Ω . In questo caso è conveniente scegliere le origini del riferimento fisso e di quello solidale coincidenti con il punto fisso. Nel Paragrafo 1.15 introdurremo delle variabili opportune per la determinazione della configurazione di un corpo in moto rigido sferico.

1.13.6 Moto rigido piano

Un moto rigido si dice piano se esiste un piano solidale p' che, ad ogni istante è sovrapposto ad un piano fisso p , che è detto piano direttore.

Sia P^* la proiezione ortogonale di un generico punto P di S sul piano solidale p' (P^* è quindi un punto solidale al corpo), si ha

$$P(t) - P^*(t) = P(t_0) - P^*(t_0) = \text{vettore costante.}$$



È conveniente scegliere come origini O ed Ω' del riferimento fisso e di quello solidale, rispettivamente un punto di p ed uno di p' e gli assi Ox_3 ed $\Omega'x'_3$ rispettivamente ortogonali a p e p' . Allora per individuare la configurazione di S , bisogna individuare quella di $\{\Omega, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ rispetto ad $\{O, e_1, e_2\}$, vale a dire, ad esempio, le coordinate $(x_{\Omega_1}, x_{\Omega_2})$ di Ω e l'anomalia di $\Omega\epsilon_1$ rispetto ad Ωe_1 : occorrono quindi tre variabili. Poiché $\forall P \in S, \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P^*}$ e le velocità sono parallele a p in quanto le distanze dei punti di S dal piano p devono rimanere costanti, da

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P^*} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - P^*).$$

si ha

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - P^*).$$

Allora, ad un istante fissato, deve essere $\boldsymbol{\omega} = 0$ oppure $\boldsymbol{\omega}$ parallela a $(P - P^*)$, vale a dire ad Oe_3 . Inoltre agli istanti cui $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $\boldsymbol{\tau}$ deve essere nulla non potendo essere parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ (tutti i punti di S hanno velocità parallela ad Oe_1e_2 !). Negli istanti in cui $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, l'intersezione dell'asse di Mozzi con il piano p si chiama centro istantaneo di rotazione.

1.14 Moti rigidi generici

Torniamo adesso a considerare un moto rigido generico. Se si sceglie un punto Q di S o ad esso solidale, che viene detto polo, si ha per un generico punto P di S o ad esso solidale

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q).$$

Lo spostamento infinitesimo di P , nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$ è quindi

$$dP = \mathbf{v}_P dt = dQ + \boldsymbol{\omega} dt \wedge (P - Q).$$

Dal punto Q si tracci la retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e sia \bar{P} la proiezione di P su di essa, la precedente formula si può allora riscrivere come

$$dP = dQ + \boldsymbol{\omega} dt \wedge (P - \bar{P}).$$

Il secondo termine a secondo membro della precedente espressione rappresenta una rotazione infinitesima di un angolo $|\boldsymbol{\omega} dt|$ attorno all'asse per Q parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, mentre il primo termine dQ è uguale per ogni $P \in S$. Vale quindi la

Proprietà 9 *Ogni spostamento rigido infinitesimo è composto di una rotazione infinitesima di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse per Q parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, e di una traslazione infinitesima dQ .*

A questo punto risulta naturale attribuire ad $\boldsymbol{\omega}$ il nome di velocità angolare. Se in particolare come polo Q scegliamo un punto dell'asse di Mozzi, si ha

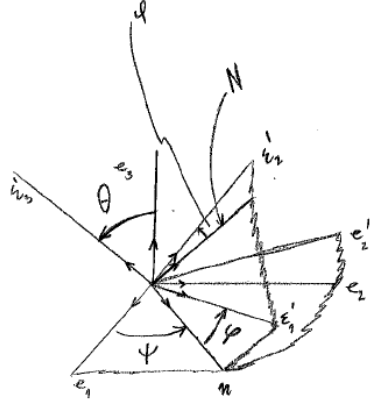
$$dP = \boldsymbol{\tau} dt + \boldsymbol{\omega} dt \wedge (P - \bar{P}),$$

con \bar{P} proiezione di P sull'asse di Mozzi all'istante t . *Istantaneamente*, allora, il moto di S in un generico moto rigido è un moto elicoidale, nel senso che esiste un moto elicoidale uniforme di S tale che all'istante considerato la configurazione e l'atto di moto di S nel moto generico di S in considerazione e in questo moto elicoidale uniforme coincidano². Questa proprietà si esprime dicendo che l'atto di moto in un generico moto rigido è ad ogni istante elicoidale. Alla luce di quanto visto in questo paragrafo ed in quello precedente valgono le

Proprietà 10 *L'atto di moto di un moto rigido sferico è ad ogni istante rotatorio attorno ad un asse uscente dal punto fisso.*

Proprietà 11 *L'atto di moto di un moto piano è ad ogni istante o traslatorio parallelamente al piano direttore o rotatorio attorno ad un asse ortogonale al piano direttore.*

²**Definizione** Due moti di S si dicono tangenti ad un dato istante, se in tale istante il generico punto di S , in tali moti, occupa in \mathcal{E}_3 la stessa posizione con la stessa velocità. Per quanto visto sopra un generico moto rigido è, ad ogni istante, tangente a quel particolare moto elicoidale uniforme per il quale S a quell'istante si trova nella posizione occupata a quell'istante nel moto in considerazione ed ha velocità angolare, velocità di traslazione ed asse di Mozzi costantemente uguali a quelli che ha S nel moto considerato, nel particolare istante considerato



1.15 Angoli di Eulero

Abbiamo visto che per individuare la configurazione di un corpo rigido libero S occorrono sei parametri, di cui tre atti ad individuare l'orientazione della terna solidale rispetto a quella dell'osservatore O , (che per comodità chiamiamo fissa).

Come tali parametri risulta spesso conveniente utilizzare i cosiddetti *angoli di Eulero*. Introduciamo il riferimento $\{O, (\epsilon'_i)\}^3$ con assi paralleli a quelli solidali, ma origine in O .

Ad ogni istante in cui \mathbf{e}_3 ed ϵ'_3 non sono paralleli risulta definita la linea intersezione dei piani per O ortogonali a questi versori. La si orienti in modo che ad essa appaia levogiro il senso in cui deve ruotare, nel piano $O\mathbf{e}_3\epsilon'_3$, l'asse $O\mathbf{e}_3$ per sovrapporsi all'asse $O\epsilon'_3$ descrivendo un angolo inferiore a π e si chiami \mathbf{n} il suo versore.

Gli angoli di Eulero sono definiti nel modo seguente:

- $0 < \theta < \pi$, detto *angolo di nutazione*, è l'anomalia di $O\epsilon'_3$ rispetto ad $O\mathbf{e}_3$, misurata assumendo come verso positivo quello levogiro rispetto ad $O\mathbf{n}$;
- $0 \leq \psi < 2\pi$, detto *angolo di precessione*, è l'anomalia di $O\mathbf{n}$ rispetto ad $O\mathbf{e}_1$, misurata assumendo come verso positivo quello levogiro rispetto ad $O\mathbf{e}_3$;

³Con un piccolo abuso di notazione non faremo più distinzione tra ϵ ed ϵ' .

- $0 \leq \varphi < 2\pi$, detto *angolo di rotazione propria*, è l'anomalia di $O\epsilon'_1$ rispetto ad $O\mathbf{n}$, misurata assumendo come verso positivo quello levogiro rispetto ad $O\epsilon'_3$.

I nomi di questi angoli sono legati allo studio del moto dei corpi celesti. Questi angoli sono indipendenti, infatti si può portare la terna $(O, (\mathbf{e}_i))$ a sovrapporsi alla terna $(O, (\epsilon'_i))$ mediante le tre rotazioni successive ed indipendenti riportate sotto:

1. Una rotazione di asse $O\mathbf{e}_3$ ed angolo ψ che porta $O\mathbf{e}_1$ a sovrapporsi a $O\mathbf{n}$. Si chiami $O\mathbf{e}_2''$ l'immagine di $O\mathbf{e}_2$ secondo questa rotazione;
2. Una rotazione di asse $O\mathbf{n}$ ed angolo θ che porta $O\mathbf{e}_3$ a sovrapporsi a $O\epsilon'_3$. Si chiami ON l'immagine di $O\mathbf{e}_2''$ secondo questa rotazione, essa, essendo ortogonale a $O\epsilon'_3$, giace nel piano $O\epsilon'_1\epsilon'_2$;
3. Una rotazione di asse $O\epsilon'_3$ ed angolo φ che porta $O\mathbf{n}$ a sovrapporsi ad $O\epsilon'_1$ e di conseguenza ON ad $O\epsilon'_2$.

Notiamo che negli istanti in cui $O\mathbf{e}_3$ ed $O\epsilon'_3$ sono paralleli, si ha $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$, ma φ e ψ risultano indeterminati in quanto indeterminata è la linea dei nodi. Non è indeterminata però la somma di φ e ψ (vale a dire l'anomalia di $O\epsilon'_1$ rispetto a $O\mathbf{e}_1$), che insieme a $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ consente di individuare l'orientazione di $(O, (\epsilon'_i))$ rispetto a $(O, (\mathbf{e}_i))$.

Per quanto visto, se si considera lo spostamento di un generico punto P solidale alla terna $(O, (\epsilon'_i))$, nell'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$, esso a meno di infinitesimi di ordine superiore a Δt è dato da

$$\Delta P = \Delta\psi\mathbf{e}_3 \wedge (P - O) + \Delta\theta\mathbf{n} \wedge (P - O) + \Delta\varphi\epsilon'_3 \wedge (P - O),$$

da cui dividendo ambo i membri per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ha

$$\mathbf{v}_P = (\dot{\psi}\mathbf{e}_3 + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\varphi}\epsilon'_3) \wedge (P - O),$$

quindi, confrontando con la formula fondamentale dei moti rigidi, si ricava che la velocità della terna $(O, (\epsilon'_i))$ rispetto a quella fissa è

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{e}_3 + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\varphi}\epsilon'_3. \quad (1.17)$$

$\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$ sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto ai versori non ortogonali, ma indipendenti, \mathbf{e}_3 , \mathbf{n} ed ϵ'_3 . Si noti che $\boldsymbol{\omega}$ è anche la velocità angolare di S , poiché gli assi di $\{O, (\epsilon'_i)\}$ sono paralleli a quelli solidali ad S . Adesso si mostrerà come a partire dalla (1.17), si possano ricavare le componenti della

velocità angolare rispetto alla base (ϵ'_i) , che vengono chiamate p, q ed r .
Si noti che $ON, O\epsilon'_3$ ed Oe_3 giacciono tutti sul piano per O ortogonale a \mathbf{n} e che ON è ortogonale ad $O\epsilon'_3$, pertanto (si veda Figura) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \cos \theta \epsilon'_3 + \sin \theta \mathbf{N}, \\ \mathbf{N} &= \cos \varphi \epsilon'_2 + \sin \varphi \epsilon'_1, \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \sin \varphi \epsilon'_1 + \sin \theta \cos \varphi \epsilon'_2 + \cos \theta \epsilon'_3. \quad (1.18)$$

Analogamente

$$\mathbf{n} = \cos \varphi \epsilon'_1 - \sin \varphi \epsilon'_2. \quad (1.19)$$

Allora sostituendo le (1.18)-(1.19) nella (1.17), si ricava

$$\boldsymbol{\omega} = \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)}_{=p} \epsilon'_1 + \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)}_{=q} \epsilon'_2 + \underbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)}_{=r} \epsilon'_3,$$

che dà il risultato cercato

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le precedenti si possono invertire, cioè si possono esprimere $\dot{\psi}$ e $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$ in funzione di p, q ed r , in quanto il determinante dei coefficienti della prima terna di velocità angolari è uguale a $-\sin \theta \neq 0$, per $\theta \neq 0, \pi$. Si trova

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= r - \cot \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi). \end{aligned} \quad (1.21)$$

In conclusione di questo paragrafo si scriverà la matrice ortogonale (Q_{ij}^T) che realizza il cambiamento di coordinate $(x_i) \rightarrow (x'_i)$ e si troveranno le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella base (\mathbf{e}_i) .

(Q_{ij}^T) è il prodotto delle tre matrici (A_{ij}) , (B_{ij}) e (C_{ij}) che rappresentano le tre rotazioni descritte in precedenza, che sono date da

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi poiché $Q_{ij}^T = C_{il}B_{lm}A_{mj}$, si ha

$$(Q_{ij}^T) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L' i^{ma} colonna di questa matrice è costituita dalle componenti di \mathbf{e}_i rispetto a (\mathbf{e}'_i) , viceversa l' i^{ma} riga contiene le componenti di \mathbf{e}'_i rispetto a (\mathbf{e}_i) .

Infine, per trovare le componenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla base (\mathbf{e}_i) ,

bisogna trovare prima (Q_{ij}) e poi calcolare $Q_{ij}\omega'_j$, con $\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$,

procedendo in questo modo si trova

$$\omega_1 = (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi)p + (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi)q + (\sin \theta \sin \psi)r,$$

$$\omega_2 = (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi)p + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi)q - (\sin \theta \cos \psi)r,$$

$$\omega_3 = (\sin \theta \sin \varphi)p + \sin \theta \cos \varphi q + \cos \theta r.$$

1.16 Moti relativi

Si considerino due sistemi di riferimento R ed R' in moto rigido l'uno rispetto all'altro. Per fissare le idee si chiami R riferimento *assoluto* ed R' riferimento *relativo*. Si consideri un punto materiale X . Conseguentemente alla terminologia introdotta, il moto di questo punto rispetto ad R si dice *assoluto*, e *relativo* quello rispetto ad R' .

Se le

$$x'_j = x'_j(t), \quad j = 1, 2, 3,$$

sono le equazioni cartesiane finite del moto relativo, per le leggi di trasformazione delle coordinate trovate nel paragrafo 1.9 le equazioni del moto assoluto saranno

$$x_i(t) = x_{\Omega_i}(t) + Q_{ij}(t)x'_j(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

Si denotino

- con \mathbf{v}'_r e \mathbf{v}_r la velocità relativa di X considerata, rispettivamente, come un vettore di E'_3 e di E_3 , analogo sia il significato di \mathbf{a}'_r ed \mathbf{a}_r .
- e con \mathbf{v} e \mathbf{a} la velocità e l'accelerazione assolute considerate come vettori di E_3 .

Le componenti di \mathbf{v}'_r e \mathbf{v}_r sono rispettivamente (\dot{x}'_j) e $(Q_{ij}\dot{x}'_j)$ mentre le componenti di \mathbf{v} sono (\dot{x}_i) .

Derivando membro a membro le (1.22), si trova

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{\Omega_i} + \underbrace{\dot{Q}_{ij}(Q^T)_{jk}(x_k - x_{\Omega_k})}_{x'_j} + Q_{ij}\dot{x}'_j, \quad (1.23)$$

Si noti che per la formula fondamentale della cinematica del moto rigido le

$$\dot{x}_{\Omega_i} + W_{ik}(x_k - x_{\Omega_k})$$

rappresentano le componenti della velocità rispetto ad R di quel punto dello spazio solidale ad R' a cui è sovrapposto X nell'istante di tempo t . Tale velocità, che viene indicata con \mathbf{v}_τ , viene detta velocità di *trascinamento* di X . Pertanto la (1.23) in notazione vettoriale si può scrivere

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_r, \quad \text{con} \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (\mathbf{P} - \Omega), \quad (1.24)$$

dove \mathbf{P} è il punto occupato da X in \mathcal{E}_3 all'istante t , ed $\boldsymbol{\omega}_\tau$ rappresenta la velocità angolare di R' rispetto ad R .

La precedente relazione prende il nome di *principio dei moti relativi*. Essa si può riscrivere nella seguente forma

$$\dot{x}_i \mathbf{e}_i = \dot{x}_{\Omega_i} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (x_i - x_{\Omega_i}) \mathbf{e}_i + Q_{ij} \dot{x}'_j \mathbf{e}_i,$$

che derivata membro a membro rispetto al tempo fornisce

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i \mathbf{e}_i &= \ddot{x}_{\Omega_i} \mathbf{e}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \wedge (x_i - x_{\Omega_i}) \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (\dot{x}_i - \dot{x}_{\Omega_i}) \mathbf{e}_i \\ &+ \dot{Q}_{ij} \overbrace{(Q^T)_{jl} Q_{lm}}^{\delta_{jm}} \dot{x}'_m \mathbf{e}_i + Q_{ij} \ddot{x}'_j \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

In notazione vettoriale la precedente si può riscrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge [\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}_\Omega] + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r \\ &= \underbrace{\mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge [\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (P - \Omega)]}_{\mathbf{a}_r} + 2\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r. \end{aligned}$$

Si noti che il termine $\mathbf{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}}_\tau \wedge (P - \Omega) + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge [\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (P - \Omega)]$ è l'accelerazione rispetto ad R di quel punto dello spazio solidale ad R' a cui X è sovrapposto nell'istante t . Questa accelerazione viene chiamata accelerazione di trascinamento ed è indicata con \mathbf{a}_r . La quantità $2\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r$ è detta accelerazione di Coriolis o complementare ed è indicata con \mathbf{a}_c . Pertanto in definitiva si ha

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_c. \quad (1.25)$$

Riguardo ai riferimenti in moto relativo, vale il seguente importante

Teorema 3 *In ogni moto del punto X risulta*

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}_r = 0$$

se e solo se il moto di trascinamento è traslatorio uniforme.

Dimostrazione (Parte sufficiente). Se il moto di trascinamento è traslatorio uniforme allora $\boldsymbol{\omega}_\tau = 0$, $\mathbf{a}_r = 0$ e $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r = 0$, questo implica che $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r$ e quindi $\mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_r = 0$.

(Parte necessaria). Sia $\mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_r = 0$. Quindi se quando X è in moto rettilineo uniforme (arbitrario) in R lo è anche in R' e viceversa deve essere $\mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r = 2\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r = 0$. Questo deve valere anche quando $\mathbf{v}_r \equiv 0$ (è un particolare moto uniforme), quindi $\mathbf{a}_r = 0$. Ne viene che $\boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{v}_r = 0$, $\forall \mathbf{v}_r$ costante, pertanto $\boldsymbol{\omega}_\tau = 0$, da cui la tesi.

1.17 Derivata assoluta e derivata relativa

In questo paragrafo si vuole trovare il legame tra le derivate temporali di un vettore \mathbf{u} rispetto ai due riferimenti R ed R' suddetti. Esse sono indicate rispettivamente con

$$\frac{d_a \mathbf{u}}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d_r \mathbf{u}}{dt}$$

e sono dette derivata assoluta e relativa di \mathbf{u} . Siano $A(t)$ e $B(t) \in \mathcal{E}_3$ tali che $\mathbf{u}(t) = B(t) - A(t), \forall t \in \mathcal{I}$. Allora, per il principio dei moti relativi si ha

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \\ &= \mathbf{v}_{rB} - \mathbf{v}_{rA} + \mathbf{v}_{\tau B} - \mathbf{v}_{\tau A} \\ &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge (B - A) \\ &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

In particolare se $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_\tau$, si ha

$$\frac{d_a \boldsymbol{\omega}_\tau}{dt} = \frac{d_r \boldsymbol{\omega}_\tau}{dt}.$$

Se poi \mathbf{u} è costante in R' , la (1.26) diventa

$$\frac{d_a \mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_\tau \wedge \mathbf{u}.$$

1.18 Moti composti di corpi in moto rigido

Si consideri adesso un corpo esteso S , in moto rigido rispetto ad R' e quindi, per l'invarianza delle distanze, anche rispetto ad R . Per la formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi, si ha per ogni punto P appartenente o solidale ad S

$$\mathbf{v}_r^P = \mathbf{v}_r^Q + \boldsymbol{\omega}_r \wedge (P - Q)$$

Q essendo il polo scelto per S (appartenente o solidale ad S), ed $\boldsymbol{\omega}_r$ la velocità angolare di S rispetto ad R' , detta relativa. Dal principio dei moti relativi abbiamo che le velocità assolute di P e Q risultano essere

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^P &= \mathbf{v}_r^P + \mathbf{v}_\tau^P, \\ \mathbf{v}^Q &= \mathbf{v}_r^Q + \mathbf{v}_\tau^Q, \end{aligned}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^P &= \mathbf{v}^Q + (\mathbf{v}_r^P - \mathbf{v}_r^Q) + (\mathbf{v}_\tau^P - \mathbf{v}_\tau^Q) \\ &= \mathbf{v}^Q + (\boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_\tau) \wedge (P - Q),\end{aligned}$$

che prova la seguente

Proprietà 12 *Il moto di S rispetto ad R , composto del moto rigido di S rispetto ad R' e del moto di R' rispetto ad R , ha velocità angolare*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_\tau.$$

Questa proprietà continua ad essere vera anche quando si hanno n riferimenti $R, R', R'', \dots, R^{(n-1)}$ e si consideri il moto di S rispetto ad R come composto dei moti di S rispetto ad $R^{(n-1)}$, di $R^{(n-1)}$ rispetto ad $R^{(n-2)}$, \dots , e di R' rispetto ad R .

1.19 Precessioni regolari

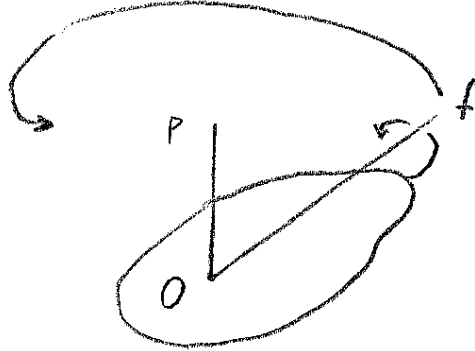
Un moto rigido sferico di un corpo S in uno spazio \mathcal{E}_3 , di centro un punto O (che si sceglie come origine) di S o solidale ad S , si dice una precessione regolare se S ruota uniformemente intorno ad un asse f (detto asse di figura) passante per O e solidale ad S ed f a sua volta ruota uniformemente intorno ad un asse p (detto asse di precessione) passante anch'esso per O e fisso in \mathcal{E}_3 .

Sia \mathcal{E}'_3 lo spazio solidale al piano Ofp , per definizione il moto di precessione di S in \mathcal{E}_3 è il moto composto del moto rotatorio uniforme di S in \mathcal{E}'_3 attorno all'asse f e del moto rotatorio uniforme attorno a p di \mathcal{E}'_3 rispetto ad \mathcal{E}_3 . Vale la seguente

Proprietà 13 *Un moto rigido sferico di un corpo S in uno spazio \mathcal{E}_3 è una precessione regolare se e solo se la velocità angolare di S è somma di due vettori, di cui uno è costante nello spazio \mathcal{E}_3 e l'altro nello spazio solidale.*

Dimostrazione (Parte necessaria). Il moto sia una precessione, la velocità angolare è somma di $\boldsymbol{\omega}_\tau$, velocità angolare di \mathcal{E}'_3 rispetto ad \mathcal{E}_3 , che essendo diretta lungo p e di modulo costante è costante in \mathcal{E}_3 e della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_r$ di S rispetto ad \mathcal{E}'_3 , che essendo diretta lungo f e di modulo costante è costante sia rispetto ad \mathcal{E}'_3 che rispetto allo spazio solidale ad S .

(Parte sufficiente). Sia $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, con $\boldsymbol{\omega}_1$ costante in \mathcal{E}_3 e $\boldsymbol{\omega}_2$ costante nello spazio solidale ad S . Sia O il punto fisso. Si chiami f l'asse uscente



da O e parallelo ad ω_2 e p quello per O parallelo ad ω_1 . Sia \mathcal{E}'_3 lo spazio solidale ad Opf . I punti F di f diversi da O , essendo solidali ad S , hanno velocità

$$\mathbf{v}_F = (\omega_1 + \omega_2) \wedge (F - O) = \omega_1 \wedge (F - O),$$

quindi il piano Ofp (ed \mathcal{E}'_3) ruota uniformemente attorno a p con velocità angolare ω_1 . Allora il moto di S è composto da un moto rotatorio uniforme rispetto ad \mathcal{E}'_3 (attorno ad f) e dal moto rotatorio uniforme di \mathcal{E}'_3 rispetto ad \mathcal{E}_3 (attorno a p).

Un moto di precessione si dice progressivo o retrogrado a seconda che sia acuto od ottuso l'angolo tra ω_1 ed ω_2 . Il vettore ω_1 si chiama velocità di precessione ed ω_2 velocità di rotazione propria.

Un moto di precessione è quello della Terra in un riferimento con origine nel centro della Terra ed assi di direzione invariabile rispetto alle stelle fisse (che sono dei corpi celesti talmente distanti dalla Terra che le loro posizioni relative sulla sfera celeste sembrano immutabili). In questo riferimento, la Terra ruota attorno al proprio asse (asse di figura) il quale a sua volta ruota attorno all'asse ortogonale al piano dell'eclittica (asse di precessione), che è il piano che contiene la traiettoria del centro della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole. Il periodo di rotazione propria è un giorno, quello di precessione circa 26.000 anni. Al moto di precessione è dovuto l'anticipo annuale di circa 20 minuti degli equinozi. Affinché un equinozio torni ad essere in un dato giorno dell'anno devono infatti trascorrere $\frac{365 \times 24 \times 60}{20} = 26.280$ anni.

Capitolo 2

Dinamica dei punti materiali e dei corpi rigidi

2.1 Sistemi di riferimento inerziali

Cominceremo lo studio della dinamica ritornando a considerare il modello più semplice di corpo naturale: il punto materiale.

L'assunto fondamentale della dinamica è che le azioni che si esplicano su un corpo S siano dovute alla presenza di altri corpi e che tali azioni risultino tanto più deboli quanto maggiore è la distanza di questi corpi da S . Sperimentalmente si osserva che la connessione tra il moto di un corpo e le cause che lo determinano (le azioni degli altri corpi) risulta più semplice in un particolare sottoinsieme \mathcal{I} dei riferimenti spazio-temporali introdotti in Cinematica.

Risulta ragionevole assumere che questo sottoinsieme sia da identificare con quei riferimenti nei quali sia il più semplice possibile il moto di un punto materiale isolato, vale a dire un punto tanto distante da ogni altro corpo da poter trascurare eventuali azioni su di esso. Quanto detto viene formalizzato nel seguente

Postulato D 1 (*Principio di inerzia*) *Esiste almeno un sistema di riferimento spazio-temporale nel quale ogni punto materiale isolato o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Questo sistema è detto inerziale ed è indicato con I .*

Per individuare un riferimento inerziale si procede come segue. Innanzitutto lo spazio \mathcal{E}_3 di I si fissa in modo che in esso risulti rettilineo il moto di

ogni punto (libero) isolato. Dopo di che considerata la retta percorsa da un prefissato punto isolato X , si munisce lo spazio \mathcal{E}_3 di orologi sincronizzati, tali che essi misurino intervalli uguali per tratti di uguale lunghezza percorsi da X sulla retta. Il tempo così definito, detto *inerziale* o *dinamico*, è individuato a meno di una trasformazione affine, ovvero a meno di una trasformazione del tipo $t' = at + b$ (che cambia l'origine e l'unità di misura del tempo). Il principio d'inerzia assicura che con questa scelta del tempo il moto di ogni altro punto isolato risulta essere anch'esso uniforme. Ammessa la validità del principio d'inerzia, dal teorema 3 del capitolo precedente discende immediatamente il seguente

Teorema 4 *Se I è un riferimento inerziale, sono inerziali tutti e soli i riferimenti in moto traslatorio uniforme rispetto ad I .*

Limitatamente ai fenomeni di moto che avvengono nel sistema solare, si ammette che: lo spazio solidale ad un riferimento con l'origine nel centro del Sole e gli assi puntati verso tre stelle fisse (spazio di Keplero) è con eccellente approssimazione inerziale.

Per quanto riguarda il tempo l'esperienza mostra che quello definito frazionando la durata della rotazione propria della Terra, è con buona approssimazione inerziale, mentre con un'approssimazione ancora migliore lo è quello definito frazionando il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole.

2.2 Legge di forza in un sistema isolato di punti materiali

Sia $S = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un sistema isolato di n punti materiali. L'interazione tra un generico punto X_A e tutti gli altri punti è governata dal seguente

Postulato D 2 *Sia I un sistema di riferimento inerziale. L'azione dinamica esplicita su un punto $X_A \in S$ da parte di un altro punto $X_B \in S$ ($B \neq A$) è espressa da un vettore applicato $(X_A, \mathbf{F}(X_A, X_B))$, che è detto forza che X_B esercita su X_A . Questo vettore non dipende dalla presenza degli altri punti materiali appartenenti a S e*

$$\mathbf{F}(X_A, X_B) = \mathbf{f}_{AB}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B),^1$$

¹La funzione \mathbf{f}_{AB} si chiama legge di forza. I pedici compaiono perché nella legge sono presenti come parametri le grandezze che esprimono le proprietà fisiche dei punti X_A e X_B . Si noti che poiché la forza all'istante t dipende dalle posizioni e dalle velocità a quell'istante in *Meccanica Classica* l'azione dinamica è supposta istantanea

con $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ vettori posizione e velocità di X_A e X_B nel riferimento I . Inoltre se S_1 ed S_2 sono due sottoinsiemi disgiunti di S , l'azione complessiva che i punti di S_2 esercitano su quelli di S_1 è data da

$$\mathbf{F}(S_1, S_2) = \sum_{(X_A, X_B) \in S_1 \times S_2} \mathbf{F}(X_A, X_B),$$

che è detta regola del parallelogramma.

Infine i due vettori applicati $(X_A, \mathbf{F}(X_A, X_B))$ e $(X_B, \mathbf{F}(X_B, X_A))$ soddisfano il principio di azione e reazione, ovvero

$$\mathbf{F}(X_A, X_B) = -\mathbf{F}(X_B, X_A).$$

2.3 Grandezze oggettive

È importante precisare il comportamento delle forze e delle leggi di forza nel passaggio dal riferimento I ad un altro riferimento R che sia inerziale o meno. A tal proposito si ha bisogno di introdurre qualche concetto preliminare. Una grandezza scalare s ed una vettoriale \mathbf{w} si dicono *oggettive* se, per le loro determinazioni in due riferimenti generici R ed R' , si ha

$$s_R = s_{R'}, \quad \mathbf{w}_R = \mathbf{w}_{R'},$$

con ovvio significato dei simboli. La seconda relazione in componenti si scrive

$$w_i = Q_{ij} w'_j,$$

dove i pedici R ed R' sono stati omissi per semplicità di scrittura.

La distanza tra due punti è un esempio di scalare oggettivo. Si considerino i vettori posizione di due punti materiali X_A e X_B nei riferimenti R ed R' , indicati rispettivamente con $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ ed $\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B$ ². Il vettore \mathbf{r}_A non è oggettivo, infatti

$$(\mathbf{r}_A)_i = (\mathbf{r}_\Omega)_i + Q_{ij} (\mathbf{r}'_A)_j,$$

con Ω origine di R' , mentre è facile verificare che il vettore $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ lo è. Siano, adesso, s e \mathbf{w} rispettivamente una grandezza scalare ed una vettoriale

²Si sta facendo un lieve abuso di notazione perché finora con \mathbf{r}'_A si è indicato il vettore di E'_3 corrispondente ad \mathbf{r}_A

oggettive, che siano funzioni delle grandezze scalari oggettive s_1, s_2, \dots, s_m e vettoriali oggettive $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$:

$$\begin{aligned} s &= h(s_1, s_2, \dots, s_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n) \\ \mathbf{w} &= \mathbf{f}(s_1, s_2, \dots, s_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n). \end{aligned}$$

Le funzioni h ed \mathbf{f} si dicono oggettive se non cambiano nel passaggio da R ad R' , sistemi di riferimento arbitrari, vale a dire

$$\begin{aligned} s &= h(s_1, s_2, \dots, s_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n) \\ &= h(s'_1, s'_2, \dots, s'_m, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_n) = s', \\ \mathbf{w} &= \mathbf{f}(s_1, s_2, \dots, s_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n) \\ &= \mathbf{f}(s'_1, s'_2, \dots, s'_m, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_n) = \mathbf{w}'. \end{aligned}$$

2.4 Comportamento delle forze e delle leggi di forza

Riguardo alle forze ed alle leggi di forza, si assume il seguente

Postulato D3 *La forza che si esplica tra due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 di un insieme isolato S di punti materiali è un vettore oggettivo nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro R' (inerziale o meno). Inoltre è oggettiva anche la legge di forza.*

Dal precedente postulato seguono delle precise restrizioni sulla forma delle leggi di forza, che sono espresse dal seguente

Teorema 5 *La legge di forza \mathbf{f}_{AB} soddisfa il postulato D3 se e solo se*

$$\mathbf{f}_{AB}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}) = \phi_{AB}(|\mathbf{r}|, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}, \quad (2.1)$$

dove ϕ_{AB} è una funzione scalare oggettiva e per semplicità di notazione

$$\mathbf{a} := \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{b} := \mathbf{r}_B, \quad \mathbf{r} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{u} := \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{b}} \quad e \quad \mathbf{k} := \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Dimostrazione (Parte sufficiente). Supponiamo valga la (2.1), ovvero

$$\mathbf{f}_{AB}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}) = \phi_{AB}(|\mathbf{r}|, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}.$$

Rivolgiamo la nostra attenzione al termine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$, si ha ³

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = \dot{r}_k \frac{r_k}{|\mathbf{r}|} = \left[Q_{km}(\mathbf{v}'^A - \mathbf{v}'^B)_m + \dot{Q}_{kl} r'_l \right] \frac{Q_{kn} r'_n}{|\mathbf{r}'|} = (\mathbf{v}'^A - \mathbf{v}'^B)_n \frac{r'_n}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{k}',$$

poiché

$$\underbrace{(Q)_{nk}^T}_{\text{antisimm.}} \underbrace{\dot{Q}_{kl}}_{\text{sim.}} r'_l r'_n = 0,$$

allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$ è uno scalare oggettivo. Utilizzando questo risultato, si ottiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_{AB}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}))_l &= \phi_{AB}(|\mathbf{r}|, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) k_l = \phi_{AB}(|\mathbf{r}'|, \mathbf{u}' \cdot \mathbf{k}') Q_{lm} k'_m \\ &= Q_{lm}(\phi_{AB}(|\mathbf{r}'|, \mathbf{u}' \cdot \mathbf{k}') k'_m) = Q_{lm}(\mathbf{f}_{AB}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \dot{\mathbf{a}}', \dot{\mathbf{b}}'))_m, \end{aligned}$$

e questo mostra che la legge di forza è oggettiva.

(Parte necessaria.) La legge di forza sia oggettiva, allora

$$\begin{aligned} Q_{ik}^T(\mathbf{f}_{AB})_k(a_m, b_m, \dot{a}_m, \dot{b}_m) &= (\mathbf{f}_{AB})_i(a'_m, b'_m, \dot{a}'_m, \dot{b}'_m), \\ &\quad \forall Q_{ik} \text{ ortogonale.} \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} Q_{ik}^T(\mathbf{f}_{AB})_k(a_m, b_m, \dot{a}_m, \dot{b}_m) &= (\mathbf{f}_{AB})_i(Q_{ml}^T(a_l - x_{\Omega_l}), Q_{ml}^T(b_l - x_{\Omega_l}), Q_{ml}^T(\dot{a}_l \\ &\quad - \dot{x}_{\Omega_l}) + \dot{Q}_{ml}^T(a_l - x_{\Omega_l}), Q_{ml}^T(\dot{b}_l - \dot{x}_{\Omega_l}) \\ &\quad + \dot{Q}_{ml}^T(b_l - x_{\Omega_l})). \end{aligned}$$

Adesso si scelgano gli assi di R' in modo che, all'istante t , essi siano paralleli e concordi a quelli di I , inoltre, sempre a quell'istante, la sua origine stia

³Si ricordi che

$$x_i = Q_{ij} x'_j + x_{\Omega_i} \quad \text{con inversa} \quad x'_j = Q_{jl}^T(x_l - x_{\Omega_l}).$$

Derivando la prima, si ottiene

$$\dot{x}_i = Q_{ij} \dot{x}'_j + \dot{Q}_{ij} x'_j + \dot{x}_{\Omega_i},$$

la cui inversa è

$$\begin{aligned} \dot{x}'_j &= Q_{ji}^T(\dot{x}_i - \dot{x}_{\Omega_i}) - Q_{ji}^T \dot{Q}_{ik} Q_{kl}^T(x_l - x_{\Omega_l}) \\ &= Q_{ji}^T(\dot{x}_i - \dot{x}_{\Omega_i}) + \dot{Q}_{ji}^T Q_{lm} Q_{mn}^T(x_n - x_{\Omega_n}) \\ &= Q_{ji}^T(\dot{x}_i - \dot{x}_{\Omega_i}) + \dot{Q}_{jl}^T(x_l - x_{\Omega_l}). \end{aligned}$$

Sottolineiamo anche che \mathbf{v}'^A indica qui la velocità di A rispetto ad R' e così via.

nella posizione occupata da B , la sua velocità angolare sia nulla e quella di traslazione sia uguale a quella del punto B , ovvero

$$Q_{hk}^T(t) = \delta_{hk}, \quad \dot{Q}_{hk}^T = 0, \quad x_{\Omega_k}(t) = b_k(t), \quad \dot{x}_{\Omega_k}(t) = \dot{b}_k(t).$$

Allora all'istante t la (2.2) diventerà

$$(\mathbf{f}_{AB})_i(a_m, b_m, \dot{a}_m, \dot{b}_m) = (\mathbf{f}_{AB})_i(r_m, 0, \dot{r}_m, 0),$$

da cui segue che \mathbf{f}_{AB} deve dipendere dai suoi argomenti attraverso $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ e $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{b}}$.

Inoltre, dall'oggettività di \mathbf{f}_{AB} deve aversi

$$\begin{aligned} Q_{ik}^T(\mathbf{f}_{AB})_k(r_m, \dot{r}_m) &= (\mathbf{f}_{AB})_i(r'_m, (\mathbf{v}'^A - \mathbf{v}'^B)_m) \\ &= (\mathbf{f}_{AB})_i(Q_{mj}^T r_j, Q_{mj}^T \dot{r}_j + \dot{Q}_{mj}^T r_j). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Quest'ultima relazione deve valere, in particolare, quando il moto di R' è tale che all'istante t $Q_{km}^T = \delta_{km}$ e \dot{Q}_{km}^T è una generica matrice antisimmetrica. Si indichi con $\boldsymbol{\omega}$ lo pseudo-vettore corrispondente all'applicazione antisimmetrica $\dot{\mathbf{Q}}^T$ (all'istante t), allora $\dot{Q}_{km}^T r_m = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})_m$. Si decomponga, inoltre, $\dot{\mathbf{r}}$ rispetto a \mathbf{k} ed al piano ad esso ortogonale

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\perp} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k},$$

allora la relazione (2.2) diventa

$$(\mathbf{f}_{AB})_i(r_m, \dot{r}_m) = (\mathbf{f}_{AB})_i(r_m, (\dot{\mathbf{r}}_{\perp})_m + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k}) k_m + (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})_m), \quad \forall \boldsymbol{\omega}.$$

Si noti che $(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, è ortogonale ad \mathbf{r} , e quindi influisce solo su $\dot{\mathbf{r}}_{\perp}$, si deduce quindi che la legge di forza può dipendere solo dalla componente di \mathbf{u} lungo \mathbf{k} , ovvero risulta

$$\mathbf{f}_{AB} = \mathbf{f}_{AB}(|\mathbf{r}|, \mathbf{k}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}).$$

In conclusione, per l'oggettività della legge di forza, deve aversi

$$\begin{aligned} Q_{ik}^T(\mathbf{f}_{AB})_k(|\mathbf{r}|, k_m, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) &= (\mathbf{f}_{AB})_i(|\mathbf{r}'|, k'_m, \mathbf{u}' \cdot \mathbf{k}') \\ &= (\mathbf{f}_{AB})_i(|\mathbf{r}|, Q_{ml}^T k_l, \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}), \quad \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale.} \end{aligned}$$

I teoremi di rappresentazione delle funzioni isotrope (vedi Appendice B) assicurano che la precedente implica che vale la (2.1), per cui la dimostrazione è conclusa.

2.5 La legge del moto di Newton

La connessione tra il moto di un sistema isolato di punti e le cause che lo determinano è stabilita dal seguente

Postulato D 4 *Sia S un sistema isolato di n punti materiali in moto in un riferimento inerziale I . Ad ogni punto X_A , $A = 1, \dots, n$, si può associare una costante positiva m_A , detta massa inerziale di X_A , che dipende solo dalla costituzione materiale del punto in questione ed è uno scalare oggettivo, tale che*

$$m_A \ddot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{F}(X_A, X_A^c), \quad A = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

dove, X_A^c è l'insieme complementare di X_A rispetto ad S .

Se, in particolare S è costituito da due soli punti X_1 ed X_2 , per le (2.3) ed il principio di azione e reazione, si ha

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}(X_1, X_2) = -\mathbf{F}(X_2, X_1) = -m_2 \mathbf{a}_2, \\ \Rightarrow m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

dalla quale si deduce la vericidità del ⁴

Teorema 6 *Due punti materiali in moto in un riferimento inerziale I , l'uno alla sola presenza dell'altro, hanno accelerazioni aventi la stessa direzione e verso opposto, inoltre il rapporto dei moduli delle accelerazioni coincide col reciproco del rapporto delle loro masse:*

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Il precedente teorema consente di misurare la massa inerziale di un qualsiasi punto materiale, una volta che sia attribuita massa unitaria ad un punto X arbitrario. Se, infatti, un qualsiasi punto X^* si muove in I alla sola presenza di X , si ha

$$m^* = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}^*|},$$

con ovvio significato dei simboli.

⁴Nella formulazione della Dinamica secondo Mach e Kirchhoff, il risultato espresso da questo teorema viene assunto come postulato, inoltre la forza che X_2 esercita su X_1 è definita come $\mathbf{F}_{12} := m_1 \mathbf{a}_{12}$, \mathbf{a}_{12} essendo l'accelerazione di X_1 quando esso si muove alla sola presenza di X_2 . Analogamente è definita \mathbf{F}_{21} . Gli altri postulati della formulazione di Mach e Kirchhoff (tutti precedenti a questo testé enunciato) riguardano le accelerazioni, vedi ad esempio Rionero.

2.7 Principio di relatività (di Galilei)

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali I ed I' . Nel passaggio da I ad I' , l'accelerazione di un qualsiasi punto materiale risulta immutata (poichè $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_c = 0$), ed inoltre, per i postulati D3 e D4, le leggi di forza e le masse risultano essere oggettive, pertanto in I' le leggi di moto si scrivono

$$m_A \ddot{\mathbf{r}}'_A = \mathbf{R}_A(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_n, \dot{\mathbf{r}}'_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}'_n), \quad A = 1, \dots, n.$$

Quanto detto dimostra il seguente

Teorema 8 (*Principio di relatività*) *Le leggi della Dinamica hanno la stessa forma (si dice che sono invarianti in forma o covarianti) in tutti i riferimenti inerziali.*

Si noti che a parità di condizioni iniziali, le soluzioni delle equazioni del moto in I e I' saranno le stesse: non risulta possibile distinguere tra riferimenti inerziali con misure meccaniche effettuate all'interno dei riferimenti ⁵.

2.8 Moto di un sistema di punti in un ambiente esterno

Sia $S = \{X_1, \dots, X_n\}$ un sistema isolato di n punti materiali in moto in un riferimento inerziale I . Indichiamo con $\mathbf{a}(X_A, (S \setminus X_A))$ l'accelerazione di X_A quando esso si muove alla presenza di tutti gli altri punti di S e con $\mathbf{a}(X_A, X_B)$ l'accelerazione di X_A quando si muove alla sola presenza di X_B . È immediato vedere che dalla legge del parallelogramma delle forze e dalla legge del moto di Newton ⁶ segue la legge del parallelogramma delle accelerazioni

$$\mathbf{a}(X_A, (S \setminus X_A)) = \sum_{B \neq A} \mathbf{a}(X_A, X_B).$$

Sia adesso $S = (Z_1, \dots, Z_n)$ un sistema isolato in moto in uno spazio inerziale I , e supponiamo che esso sia decomponibile in due sottosistemi disgiunti $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_{n_1})$ ed $\mathcal{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$, con $n_1 + n_2 = n$. Siano m_A ed M_B le masse rispettivamente di X_A ed Y_B , con $A = 1, \dots, n_1$ e $B = 1, \dots, n_2$, e siano queste masse tali che

$$\sum_{A=1}^{n_1} m_A \ll M_B, \quad \forall B = 1, \dots, n_2.$$

⁵Si legga la pagina sulla nave del Dialogo dei massimi sistemi di Galilei

⁶ $m_{AA}\mathbf{a}(X_A, (S \setminus X_A)) = \sum_{B \neq A} \mathbf{F}(X_A, X_B) = \sum_{B \neq A} m_{AB}\mathbf{a}(X_A, X_B)$, con m_{AA} massa di X_A , $A = 1, \dots, n$.

Analizziamo, adesso, il contributo all'accelerazione di un generico punto $Y_B \in \mathcal{Y}$ da parte di un generico punto $X_A \in \mathcal{X}$, si ha

$$\begin{aligned} M_B \mathbf{a}(Y_B, S \setminus Y_B) &= \sum_{C \neq B} \mathbf{F}(Y_B, Y_C) + \sum_A \mathbf{F}(Y_B, X_A) \\ &= - \sum_{C \neq B} M_C \mathbf{a}(Y_C, Y_B) - \sum_A m_A \mathbf{a}(X_A, Y_B), \end{aligned}$$

da cui, dividendo ambo i membri per M_B ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(Y_B, S \setminus Y_B) &= - \sum_{C \neq B} \frac{M_C}{M_B} \mathbf{a}(Y_C, Y_B) - \sum_A \underbrace{\frac{m_A}{M_B}}_{\ll 1} \mathbf{a}(X_A, Y_B) \\ &\simeq - \sum_{C \neq B} \frac{M_C}{M_B} \mathbf{a}(Y_C, Y_B). \end{aligned}$$

Questo risultato mostra che, nelle ipotesi fatte, l'influenza dinamica dei punti di \mathcal{X} può essere trascurata quando si studia il moto del sistema \mathcal{Y} . Quest'ultimo viene detto ambiente esterno ad \mathcal{X} ed il suo moto si può, quindi, determinare considerandolo (in prima approssimazione) come un sistema isolato.

Se si indica con

\mathbf{r}_A il vettore posizione di X_A , $A = 1, \dots, n_1$,

\mathbf{y}_B il vettore posizione di Y_B , $B = 1, \dots, n_2$,

$\mathbf{R}_A^{(i)}$ il risultante delle forze interne agenti su X_A , definite come le forze esercitate su X_A dagli altri punti di \mathcal{X} ,

$\mathbf{R}_A^{(e)}$ il risultante delle forze esterne esercitate su X_A , cioè dovute, per definizione, all'azione dei punti di \mathcal{Y} ,

allora le equazioni del moto dei punti di \mathcal{X} si scrivono

$$\begin{aligned} m_A \ddot{\mathbf{r}}_A &= \mathbf{R}_A^{(e)}(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{n_2}(t), \dot{\mathbf{y}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_{n_2}(t)) \\ &\quad + \mathbf{R}_A^{(i)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1}, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{n_1}), \quad A = 1, \dots, n_1. \end{aligned}$$

Si noti che una volta determinato il moto dei punti di \mathcal{Y} , sia le posizioni che le velocità di tali punti risultano funzioni assegnate del tempo e quindi

$$\mathbf{R}_A^{(e)} = \mathbf{R}_A^{(e)}(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, t).$$

In generale tale funzione non è una funzione oggettiva di \mathbf{r}_A e $\dot{\mathbf{r}}_A$.⁷ Se, infine si suppone che \mathcal{X} sia costituito da un solo punto materiale, si ha

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^{(e)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

che è l'equazione fondamentale della Dinamica del punto materiale libero.

2.9 Sistemi di punti materiali, equazioni cardinali

Consideriamo un sistema \mathcal{X} di punti materiali in moto in uno spazio-tempo inerziale I , in presenza di un ambiente \mathcal{Y} il cui moto si supponga noto a priori. Per il principio di azione-reazione si ha

$$\mathbf{F}(X_A, X_B) = -\mathbf{F}(X_B, X_A), \quad A \neq B,$$

inoltre, poiché queste forze sono parallele ad $X_A - X_B$, si ha anche

$$(X_A - X_B) \wedge \mathbf{F}(X_A, X_B) = -(X_A - X_B) \wedge \mathbf{F}(X_B, X_A) = \mathbf{0}.$$

Allora, suddividendo le forze interne a coppie $(\mathbf{F}(X_A, X_B), \mathbf{F}(X_B, X_A))$, si può provare che

$$\sum_{A=1}^{n_1} \mathbf{R}_A^{(i)} = \mathbf{0}, \quad \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{R}_A^{(i)} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

dove \tilde{O} è un punto arbitrariamente scelto, fisso o mobile rispetto ad I , che è detto polo, mentre $(X_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{w}$ è detto momento di \mathbf{w} rispetto ad \tilde{O} , \mathbf{w} essendo un qualsiasi vettore applicato nel punto X_A .

Se si sommano membro a membro dapprima le equazioni di Newton relative ad ogni punto X_A , $A = 1, \dots, n_1$ e poi le stesse equazioni moltiplicate vettorialmente a sinistra per $X_A - \tilde{O}$, e si usano le (2.5), si ottiene la prima forma delle equazioni cardinali della meccanica per un sistema di punti materiali:

$$\sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{a}_A = \sum_{A=1}^{n_1} \mathbf{R}_A^{(e)} =: \mathbf{R}^{(e)}, \quad (2.6)$$

$$\sum_{A=1}^{n_1} (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A \mathbf{a}_A = \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{R}_A^{(e)} =: \mathbf{M}_{\tilde{O}}^{(e)}, \quad (2.7)$$

⁷A causa della presenza dell'ambiente esterno \mathcal{Y} , in moto assegnato, viene meno l'omogeneità e l'isotropia dello spazio-tempo

dove $\mathbf{R}^{(e)}$ è il risultante di tutte le forze esterne e $\mathbf{M}_{\tilde{O}}^{(e)}$ è il momento risultante rispetto al polo \tilde{O} di tutte le forze esterne. Queste equazioni non sono sufficienti a determinare il moto di un sistema di punti materiali, tranne in alcuni casi particolari, quale quello in cui la distanza tra ogni coppia di punti del sistema è vincolata a rimanere costante (punti vincolati rigidamente).

2.10 Quantità di moto e momento della quantità di moto e loro equazioni di bilancio

La quantità di moto del punto materiale X_A , $A \in \{1, \dots, n_1\}$, nello spazio I è definita come

$$\mathbf{Q}_A := m_A \mathbf{v}_A.$$

Naturalmente, la quantità di moto totale del sistema \mathcal{X} sarà definita come la somma delle quantità di moto di tutti i suoi punti,

$$\mathbf{Q} := \sum_{A=1}^{n_1} \mathbf{Q}_A.$$

Derivando rispetto al tempo questa quantità, si ottiene

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{a}_A. \quad (2.8)$$

Usando questa relazione è possibile riscrivere la prima equazione cardinale (2.6) nella forma

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{(e)},$$

quest'ultima prova la seguente

Proprietà 14 *La derivata temporale della quantità di moto di un sistema di punti materiali è uguale, ad ogni istante, al risultante delle forze esterne. In particolare, se quest'ultimo è nullo la quantità di moto si conserva (è costante nel tempo).*

Se $m := \sum_{A=1}^{n_1} m_A$ è la massa totale del sistema \mathcal{X} di punti, si definisce baricentro di questo sistema il punto G definito dalla relazione

$$m(G - O) := \sum_{A=1}^{n_1} m_A (X_A - O). \quad (2.9)$$

Si noti che G non cambia se si sostituisce O con un qualsiasi altro punto O' , infatti

$$\begin{aligned} m(G' - O') &= \sum_{A=1}^{n_1} m_A (X_A - O') = \sum_{A=1}^{n_1} m_A [(X_A - O) + (O - O')] \\ &= m(G - O) + m(O - O') = m(G - O'), \end{aligned}$$

da cui $G = G'$. Derivando la (2.9) una prima volta rispetto al tempo, si ottiene

$$m \mathbf{v}_G = \mathbf{Q}.$$

Derivando una seconda volta e tenendo conto della (2.8), si vede che la prima equazione cardinale si può scrivere nella forma ancora diversa

$$m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (2.10)$$

che prova la seguente

Proprietà 15 *Il baricentro di un sistema di punti materiali si muove come un punto materiale di massa m sottoposto ad una forza uguale al risultante delle forze esterne. In particolare, se il sistema di punti è isolato, il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme o è in quiete.*

In maniera analoga è possibile riscrivere la seconda equazione cardinale, definendo il momento della quantità di moto del punto X_A rispetto al polo \tilde{O} ,

$$\mathbf{L}_{A, \tilde{O}} := (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A \mathbf{v}_A,$$

ed il momento risultante della quantità di moto (o momento angolare) del sistema \mathcal{X} rispetto allo stesso polo,

$$\mathbf{L}_{\tilde{O}} := \sum_{A=1}^{n_1} \mathbf{L}_{A, \tilde{O}}.$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (2.7), otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_{\tilde{O}} &= \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A \mathbf{a}_A + \sum_{A=1}^{n_1} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{\tilde{O}}) \wedge m_A \mathbf{v}_A \\ &= \sum_{A=1}^N (X_A - \tilde{O}) \wedge m_A \mathbf{a}_A - \mathbf{v}_{\tilde{O}} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_{\tilde{O}}^{(e)} - \mathbf{v}_{\tilde{O}} \wedge \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{v}_{\tilde{O}}$ è la velocità di \tilde{O} . Chiaramente questa velocità è nulla se il polo è fisso nel riferimento considerato. Il secondo termine all'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze si annulla anche nel caso in cui come polo si scelga il baricentro, perché la velocità di quest'ultimo è parallela alla quantità di moto totale del sistema. Risulta quindi provata la seguente

Proprietà 16 *Se come polo si sceglie un punto fisso o il baricentro, la derivata temporale del momento angolare è, ad ogni istante, uguale al momento, rispetto al polo scelto, delle forze esterne agenti su \mathcal{X} . In particolare, per un sistema isolato il momento angolare si conserva (è costante nel tempo).*

Le equazioni cardinali nelle loro ultime forme sono anche dette rispettivamente equazione di bilancio della quantità di moto e del momento angolare.

2.11 Energia cinetica e moto attorno al baricentro

L'energia cinetica, o forza viva, associata ad un punto materiale X_A nel suo moto in un riferimento R è definita come

$$K_A := \frac{1}{2} m_A |\mathbf{v}_A|^2,$$

mentre l'energia cinetica totale del sistema \mathcal{X} è definita come

$$K := \sum_{A=1}^{n_1} K_A.$$

Si consideri, adesso, il riferimento R_G con origine nel baricentro ed assi ad ogni istante paralleli e concordi a quelli di R . Il moto di \mathcal{X} rispetto ad R_G si chiama moto attorno al baricentro. Vale il seguente

Teorema 17 *(di König) L'energia cinetica K di \mathcal{X} nel suo moto rispetto ad R è la somma dell'energia cinetica K' del moto attorno al baricentro e dell'energia cinetica che avrebbe il baricentro, nel suo moto rispetto ad R , se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema, vale a dire*

$$K = K' + \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_G|^2. \quad (2.11)$$

Dimostrazione. Il moto di R_G rispetto ad R è traslatorio con velocità di traslazione uguale a \mathbf{v}_G , pertanto per il principio dei moti relativi si ha ⁸

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_G, \quad \forall A = 1, \dots, n_1,$$

⁸ \mathbf{v}'_A è la velocità di X_A in R_G

allora

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{n_1} m_A (\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_G) \cdot (\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_G) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{n_1} m_A |\mathbf{v}'_A|^2 + \mathbf{v}_G \cdot \sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{v}'_A + \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_G|^2,
\end{aligned}$$

ed essendo $\sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{v}'_A = m \mathbf{v}'_G = \mathbf{0}$ il teorema risulta provato. Un altro utile risultato è espresso dal seguente

Teorema 18 *Il momento angolare \mathbf{L}' del sistema di punti nel moto attorno al baricentro non dipende dal polo che si sceglie. Inoltre se come polo si sceglie il baricentro, il momento angolare rispetto ad R coincide con \mathbf{L}' , cioè si ha*

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{L}' \quad (2.12)$$

Dimostrazione. Siano \tilde{O} e \tilde{O}' due poli arbitrari, allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}'_{\tilde{O}'} &= \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - \tilde{O}') \wedge m_A \mathbf{v}'_A = \sum_{A=1}^{n_1} [(X_A - \tilde{O}) + (\tilde{O} - \tilde{O}')] \wedge m_A \mathbf{v}'_A \\
&= \mathbf{L}'_{\tilde{O}} + (\tilde{O} - \tilde{O}') \wedge m \mathbf{v}'_G = \mathbf{L}'_{\tilde{O}}.
\end{aligned}$$

Per provare la seconda parte del teorema, si noti che

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_G &= \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - G) \wedge m_A \mathbf{v}_A = \sum_{A=1}^{n_1} (X_A - G) \wedge m_A (\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_G) \\
&= \mathbf{L}' + \sum_{A=1}^{n_1} m_A (X_A - G) \wedge \mathbf{v}_G = \mathbf{L}',
\end{aligned}$$

poiché per la definizione di baricentro $\sum_{A=1}^{n_1} m_A (X_A - G) = m(G - G) = \mathbf{0}$.

2.12 Lavoro di un sistema di forze, teorema delle forze vive

Sia \mathcal{X} il consueto sistema di punti materiali in moto nello spazio-tempo inerziale I sotto l'azione dell'ambiente esterno \mathcal{Y} . Sia \mathbf{R}_A il risultante di tutte le forze agenti sul punto X_A , $A = 1, \dots, n_1$. Si chiama lavoro compiuto

dal sistema di forze applicate $\{(X_A, \mathbf{R}_A)\}_{A=1}^{n_1}$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ la quantità

$$L_{[t_0, t_1]} := \sum_{A=1}^{n_1} \int_{\mathbf{r}_A(t_0)}^{\mathbf{r}_A(t_1)} \mathbf{R}_A \cdot d\mathbf{r}_A,$$

dove

$$\int_{\mathbf{r}_A(t_0)}^{\mathbf{r}_A(t_1)} \mathbf{R}_A \cdot d\mathbf{r}_A := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}_A(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_{n_1}(t), t) \cdot \mathbf{v}_A(t) dt.$$

Tale lavoro, naturalmente, non dipende solamente dall'intervallo di tempo considerato ma, in generale, anche dal moto del sistema. Si noti inoltre che, essendo $\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A^{(i)} + \mathbf{R}_A^{(e)}$, $A = 1, \dots, n_1$, risulta

$$\overline{L}(t_0, t_1) = L^{(i)}(t_0, t_1) + L^{(e)}(t_0, t_1),$$

dove $L^{(i)}(t_0, t_1)$ e $L^{(e)}(t_0, t_1)$ sono rispettivamente il lavoro compiuto dalle forze interne e quello compiuto dalle forze esterne.

Se si considera, adesso, l'energia cinetica K di \mathcal{X} e la si deriva rispetto al tempo, si ha

$$\dot{K} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{A=1}^{n_1} m_A |\mathbf{v}_A|^2 \right) = \sum_{A=1}^{n_1} m_A \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{v}_A = \sum_{A=1}^{n_1} \mathbf{R}_A \cdot \mathbf{v}_A.$$

Integrando rispetto al tempo, nell'intervallo $[t_0, t_1]$, il primo e l'ultimo membro della precedente, si ottiene

$$K(t_1) - K(t_0) = L_{[t_0, t_1]},$$

ovvero vale il seguente

Teorema 19 *(delle forze vive) La variazione dell'energia cinetica del sistema \mathcal{X} nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è uguale al lavoro compiuto dalle forze interne ed esterne in questo intervallo di tempo.*

2.13 Forze conservative e conservazione dell'energia meccanica

Si supponga adesso che le forze agenti sui punti di \mathcal{X} dipendano solo dalle posizioni di tali punti, in tal caso si parla di forze posizionali. Si dirà poi che tali forze costituiscono una sollecitazione conservativa se esiste una funzione

scalare $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1})$, definita a meno di una costante additiva arbitraria e detta *energia potenziale* del sistema \mathcal{X} , tale che

$$(\mathbf{R}_A)_i = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1})}{\partial (\mathbf{r}_A)_i}, \quad A = 1, \dots, n_1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel caso di un sistema in moto sotto l'azione di una sollecitazione conservativa, si ha

$$\begin{aligned} L_{[t_0, t_1]} &= \sum_{A=1}^{n_1} \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{R}_A)_i (\mathbf{v}_A)_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{A=1}^{n_1} \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1})}{\partial (\mathbf{r}_A)_i} (\dot{\mathbf{r}}_A)_i dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dU(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t))}{dt} dt \\ &= - \left[U(\mathbf{r}_1(t_1), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t_1)) - U(\mathbf{r}_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t_0)) \right]. \end{aligned}$$

Questo risultato prova il seguente

Teorema 20 *Il lavoro di una sollecitazione conservativa in un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ dipende solo dalle posizioni iniziali e finali dei punti del sistema \mathcal{X} su cui essa agisce ed è uguale all'opposto della variazione di energia potenziale nell'intervallo di tempo considerato.*

L'*energia meccanica* E di un sistema sul quale agisce una sollecitazione conservativa è, per definizione

$$E := K + U.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} \Delta E_{[t_0, t_1]} &:= E(t_1) - E(t_0) \\ &= K(t_1) - K(t_0) + U(\mathbf{r}_1(t_1), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t_1)) - U(\mathbf{r}_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_{n_1}(t_0)) \\ &= K(t_1) - K(t_0) - L_{[t_0, t_1]} = 0, \end{aligned}$$

ovvero vale il seguente

Teorema 21 *(Principio di conservazione dell'energia meccanica o totale)*
Per un sistema in moto sotto l'azione di una sollecitazione conservativa si mantiene costante l'energia totale.

2.14 Dinamica nei riferimenti non inerziali

Vediamo come diventano le leggi del moto di un sistema di punti materiali \mathcal{X} che si muove sotto l'azione di un ambiente \mathcal{Y} in un riferimento non inerziale R , in moto rigido rispetto ad un riferimento inerziale I .

Le leggi del moto di \mathcal{X} in I sono

$$m_A \mathbf{a}_A = \mathbf{R}_A^{(e)} \left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{n_2}(t), \dot{\mathbf{y}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_{n_2}(t) \right) + \mathbf{R}_A^{(i)} \left(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1}, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{n_1} \right), \quad A = 1, \dots, n_1.$$

Nel capitolo precedente, a proposito dei moti relativi, si è mostrato che

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{r,A} + \mathbf{a}_{\tau,A} + \mathbf{a}_{c,A}, \quad A = 1, \dots, n_1,$$

sostituendo nelle leggi del moto, si ha

$$m_A \mathbf{a}_{r,A} = \mathbf{R}_A^{(e)} \left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{n_2}(t), \dot{\mathbf{y}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}_{n_2}(t) \right) + \mathbf{R}_A^{(i)} \left(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_1}, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{n_1} \right) - m_A \mathbf{a}_{\tau,A} - m_A \mathbf{a}_{c,A}, \quad A = 1, \dots, n_1,$$

che ricordando l'oggettività delle masse, delle forze e delle leggi di forza, diventano

$$m_A \mathbf{a}'_{r,A} = \mathbf{R}'_A \left(\mathbf{r}'_A, \dot{\mathbf{r}}'_A, \mathbf{y}'_1(t), \dots, \mathbf{y}'_{n_2}(t), \dot{\mathbf{y}}'_1(t), \dots, \dot{\mathbf{y}}'_{n_2}(t) \right) + \mathbf{R}'_A \left(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{n_1}, \dot{\mathbf{r}}'_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}'_{n_1} \right) - m_A \mathbf{a}'_{\tau,A} - 2m_A \boldsymbol{\omega}'_{\tau} \wedge \dot{\mathbf{r}}'_A, \quad A = 1, \dots, n_1.$$

Queste ultime rappresentano le leggi del moto in R .

In esse

- $-m_A \mathbf{a}'_{\tau,A}$ è detta *forza di trascinamento* sul punto X_A ,
- $-m_A \mathbf{a}'_{c,A}$ è detta *forza centrifuga composta o complementare* sul punto X_A .

Entrambe vengono dette forze apparenti del moto relativo in quanto non sono dovute alla presenza di altri corpi (che generano forze dette reali), ma alla non inerzialità di R . Le forze apparenti evidentemente non sono oggettive, inoltre se non si conosce il moto di R rispetto ad I non possono essere valutate.

Si può mostrare che le equazioni cardinali di un sistema di punti materiali continuano a valere in R , purché tra le forze esterne si considerino anche quelle apparenti.

2.15 Baricentro, quantità di moto e momento angolare di un corpo rigido

Estendiamo i concetti introdotti nei paragrafi precedenti ai corpi rigidi. La differenza essenziale nello studio del moto di uno o più corpi rigidi è che mentre le grandezze caratteristiche di un sistema di punti materiali (la massa, la carica elettrica, etc.) e quelle caratteristiche del loro moto (la velocità, l'accelerazione, etc.) sono concentrate nei punti dello spazio da essi occupati, quelle dei corpi estesi sono distribuite con continuità nella regione di spazio occupata dai corpi. Pertanto, nel caso dei corpi estesi, per definire la massa, il baricentro e tutte le altre quantità prima introdotte per i sistemi di punti materiali, è necessario usare degli integrali estesi alla regione di spazio occupata dai corpi.

Sia S un corpo rigido in moto in un riferimento $R = \{O, (\mathbf{e}_i)\}$ ed $R' = \{\Omega', (\mathbf{e}'_i)\}$ sia un riferimento solidale ad S . Si suppone che ad ogni sottoparte misurabile $s \subseteq S$ del corpo sia associabile uno scalare costante, oggettivo $m(s) > 0$, che è detto massa di s . Si suppone, inoltre, che esista una funzione scalare $\rho'(\mathbf{r}')$, detta densità di massa di S , tale che ⁹

$$m(s) = \int_{C'} \rho'(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

C' essendo la regione di spazio occupata da s in R' .

Si noti che per l'oggettività dei volumi in un cambiamento di riferimento, la densità di massa è anch'essa oggettiva, vale a dire $\rho(\mathbf{r}) = \rho'(\mathbf{r}')$.

Si definisce baricentro di S il punto G tale che

$$m(G - O) := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}')(P - O)(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}',^{10} \quad (2.13)$$

con C' regione di spazio occupata da S in R' ed $m := m(S)$, massa totale di S . Si definisce quantità di moto di S rispetto ad R

$$\mathbf{Q} := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

⁹Le funzioni integrande che compaiono in questo e nei successivi integrali *devono essere intese* come funzioni delle coordinate (x'_i) , questo perché l'integrazione è convenientemente effettuata sulla regione di spazio occupata in R' da S o da sue sottoparti, in quanto questa regione è indipendente dal tempo. Pertanto deve aversi $\rho = \rho(P, t) = \rho(P(\mathbf{r}', t), t)$, $P - O = (P - \Omega)(\mathbf{r}', t) + (\Omega - O)(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}' + \mathbf{r}_\Omega(t)$, $\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{v}(P(\mathbf{r}', t), t)$ e così via. Questo tipo di descrizione è detta lagrangiana. Un'altra descrizione possibile è quella euleriana per la quale si rimanda al Rionero.

¹⁰nel seguito, per semplicità di scrittura, tralascieremo di indicare esplicitamente la dipendenza dal tempo

\mathbf{v} essendo la velocità del generico punto P di S rispetto ad R .
 Derivando rispetto al tempo la (2.13) e tenendo conto che C' è indipendente dal tempo, si ha (per la regolarità della funzione integranda)

$$m \mathbf{v}_G = \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathbf{Q}.$$

Il momento angolare di S rispetto ad un polo \tilde{O} , nel riferimento R è definito da

$$\mathbf{L}_{\tilde{O}} := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - \tilde{O}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Se, in particolare, \tilde{O} è un punto di S o solidale ad esso (ad esempio il baricentro), si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\tilde{O}} &= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - \tilde{O}) \wedge (\mathbf{v}_{\tilde{O}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - \tilde{O})) d\mathbf{r}' = m(G - \tilde{O}) \wedge \mathbf{v}_{\tilde{O}} \\ &+ \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |P - \tilde{O}|^2 \boldsymbol{\omega} d\mathbf{r}' - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - \tilde{O}) \cdot \boldsymbol{\omega}] (P - \tilde{O}) d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Se il moto di S è rigido sferico e si sceglie Ω coincidente con il punto fisso e come polo, la precedente diventa

$$\mathbf{L}_{\Omega} = \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |P - \Omega|^2 \boldsymbol{\omega} d\mathbf{r}' - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - \Omega) \cdot \boldsymbol{\omega}] (P - \Omega) d\mathbf{r}'.^{11}$$

È immediato mostrare che si ha un'espressione analoga anche per un moto generico qualora si prenda come polo il baricentro G .
 Si definiscano le quantità

$$\mathcal{I}_{\Omega,ij} := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(x_k - x_{\Omega_k})^2 \delta_{ij} - (x_i - x_{\Omega_i})(x_j - x_{\Omega_j})] d\mathbf{r}',$$

¹¹Questa relazione si può anche scrivere nel seguente modo:

$$\mathbf{L}_{\Omega} = \left\{ \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [|P - \Omega|^2 \mathbf{I} - (P - \Omega) \otimes (P - \Omega)] d\mathbf{r}' \right\} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

dove \otimes è il simbolo di prodotto tensoriale. Se \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 sono due vettori di uno spazio vettoriale euclideo E_n , il loro prodotto tensoriale $\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2$ può essere definito come l'applicazione bilineare che ad una $\forall (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in E_n \times E_n$ associa il numero $(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$. Equivalentemente, si può definire $\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2$ come quell'applicazione da E_n in sè stesso che opera sui vettori di E_n nel seguente modo:

$$(\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{w}_2)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_1, \quad \forall \mathbf{v} \in E_n.$$

che rappresentano nove numeri reali associati alla base (\mathbf{e}_i) , si ha ¹²

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Omega,ij} &= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [Q_{kl}x'_l Q_{km}x'_m \delta_{ij} - Q_{il}x'_l Q_{jm}x'_m] d\mathbf{r}' \\ &= Q_{il} \left\{ \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(x'_k)^2 \delta_{lm} - x'_l x'_m] d\mathbf{r}' \right\} Q_{jm} = Q_{il} \mathcal{I}'_{\Omega,lm} Q_{jm},\end{aligned}$$

dove gli $\mathcal{I}'_{\Omega,lm} := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(x'_k)^2 \delta_{lm} - x'_l x'_m] d\mathbf{r}'$ rappresentano i corrispondenti nove numeri reali associati alla base (\mathbf{e}_i) . Pertanto i nove numeri $\mathcal{I}_{\Omega,ij}$ in un cambiamento di base subiscono la trasformazione di similitudine

$$\mathcal{I}_{\Omega,ij} = Q_{il} \mathcal{I}'_{\Omega,lm} Q_{mj}^T = Q_{il} \mathcal{I}'_{\Omega,lm} Q_{mj}^{-1}.$$

e sono le componenti nella base (\mathbf{e}_i) di un tensore doppio oggettivo (vedi ad esempio Rionero). L'applicazione lineare \mathcal{I}_{Ω} a cui nella base (\mathbf{e}_i) corrisponde la matrice $(\mathcal{I}_{\Omega,ij})$ si chiama tensore d'inerzia di S rispetto al polo Ω . Si noti che le componenti nel riferimento solidale sono indipendenti dal tempo, e dipendono solamente da come è *distribuita la massa di S attorno ad Ω* . Come risulterà chiaro nel seguito, il tensore d'inerzia gioca, per un solido in rotazione, il ruolo che ha la massa per un punto materiale, cioè misura la riluttanza di un corpo a cambiare il suo stato di moto (vale a dire la sua inerzia).

Utilizzando il tensore d'inerzia, si vede immediatamente (ad esempio calcolandolo nella base (\mathbf{e}_i)) che, per un moto rigido sferico di punto fisso Ω , si ha

$$\mathbf{L}_{\Omega} = \mathcal{I}_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}).$$

Il tensore d'inerzia relativo al baricentro, \mathcal{I}_G , si chiama tensore centrale d'inerzia e si ha $\mathbf{L}_G = \mathcal{I}_G(\boldsymbol{\omega})$, per un qualsiasi moto rigido. In maniera simile a come si è fatto per un sistema di punti materiali, si dimostra il seguente

Teorema 22 *Se come polo si sceglie il baricentro, il momento angolare relativo ad R coincide con \mathbf{L}_G'' , che denota il momento angolare, di polo G , del sistema S nel suo moto attorno al baricentro:*

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{L}_G'' = \mathcal{I}_G(\boldsymbol{\omega}).$$

¹²Sono sottintese le sommatorie su k, l ed m . Si ricordi anche che $Q_{im}Q_{jm} = (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)_{ij} = \delta_{ij}$ e si noti che

$$(x'_k)^2 \delta_{ij} = (x'_k)^2 Q_{il}Q_{lj}^T = (x'_k)^2 Q_{il} \delta_{lm} Q_{mj}^T.$$

Naturalmente è possibile definire il tensore d'inerzia anche per un sistema di punti materiali

Più in generale per un $\forall \tilde{O}$, si ha

$$\mathbf{L}_{\tilde{O}} = \mathbf{L}_{\tilde{O}}'' + (G - \tilde{O}) \wedge m\mathbf{v}_G.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\tilde{O}} &= \int_{C'} \rho(P - \tilde{O}) \wedge (\mathbf{v}'' + \mathbf{v}_G) d\mathbf{r}' = \mathbf{L}_{\tilde{O}}'' + (G - \tilde{O}) \wedge m\mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{L}_G + (G - \tilde{O}) \wedge m\mathbf{v}_G, \end{aligned}$$

con \mathbf{v}'' velocità rispetto ad R_G del generico punto di S ¹³.

2.16 Energia cinetica di un corpo rigido

Si consideri un corpo S in moto rigido sferico rispetto ad un riferimento R con l'origine O scelta coincidente con il punto fisso del moto. L'energia cinetica di S rispetto ad R è definita come

$$K := \frac{1}{2} \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |\mathbf{v}(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}',$$

con \mathbf{r}' vettore posizione del generico punto di S in un riferimento R' solidale, con l'origine in O .

Si ha ¹⁴

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{C'} \rho(\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{C'} \rho(P - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] d\mathbf{r}' \right\} \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_O = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{I}_O(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

¹³Si noti come anche nel caso di un corpo rigido il momento della quantità di moto nel moto attorno al baricentro non dipenda dal polo scelto, infatti:

$$\mathbf{L}_{\tilde{O}}'' = \int_{C'} \rho(P - \tilde{O}) \wedge \mathbf{v}'' d\mathbf{r}' = \int_{C'} \rho[(P - G) + (G - \tilde{O})] \wedge \mathbf{v}'' d\mathbf{r}' = \mathbf{L}_G'', \forall \tilde{O}.$$

¹⁴Nella seconda uguaglianza si sfrutta l'invarianza del prodotto misto per permutazioni cicliche: $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$, con $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = (P - O)$ e $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$

In un generico moto rigido di un corpo, l'energia cinetica si può calcolare grazie al teorema di König, che continua a valere anche in questo caso, infatti

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{C'} \rho |\mathbf{v}(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \int_{C'} \rho (\mathbf{v}''(\mathbf{r}') + \mathbf{v}_G) \cdot (\mathbf{v}''(\mathbf{r}') + \mathbf{v}_G) d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{2} \int_{C'} \rho |\mathbf{v}''(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}' + \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_G|^2 + \underbrace{\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{Q}''}_{=0}, \end{aligned}$$

con

- $\mathbf{v}''(\mathbf{r}')$ velocità rispetto ad R_G del punto di S di posizione \mathbf{r}' nel riferimento solidale,
- K'' energia cinetica di S rispetto ad R_G ,
- \mathbf{Q}'' quantità di moto S rispetto ad R_G , che è nulla.

2.17 Base centrale d'inerzia e calcolo del momento angolare e dell'energia cinetica

L'energia cinetica del moto attorno al baricentro, essendo questo un moto rigido con punto fisso G , è data da

$$K'' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{I}_G(\boldsymbol{\omega}).$$

La matrice rappresentativa di \mathcal{I}_G in un riferimento solidale è costante. Inoltre, vale la

Proprietà 23 \mathcal{I}_G (vale anche per un polo \tilde{O} arbitrario) è un'applicazione simmetrica e definita positiva (a meno che i punti del corpo non siano allineati tra di loro), vale a dire che $\forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{w} \in E_3$ si ha

- $\mathbf{u} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{u})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{u}) \geq 0$, $= 0$ se e solo se $\mathbf{u} = 0$.

Dimostrazione.

- Per quanto riguarda la prima parte si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \wedge [\mathbf{w} \wedge (P - G)] d\mathbf{r}' \\
&\stackrel{=}{=} \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [\mathbf{w} \wedge (P - G)] \cdot [\mathbf{u} \wedge (P - G)] d\mathbf{r}' \\
&\text{con due permutazioni cicliche} \\
&= \mathbf{w} \cdot \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \wedge [\mathbf{u} \wedge (P - G)] d\mathbf{r}' \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

- per la seconda parte

$$\mathbf{u} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{u}) = \int_{C'} \rho |\mathbf{u} \wedge (P - G)|^2 d\mathbf{r}',$$

e quest'ultimo integrale si annulla se e solo se $\mathbf{u} \wedge (P - G) = \mathbf{0}$, $\forall P \in S$, quindi se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (a meno che i punti di S non siano tutti allineati ad \mathbf{u}).

Si sa dall'algebra lineare, che vista la simmetria di \mathcal{I}_G , esiste almeno una base ortonormale costituita da autovettori di \mathcal{I}_G , rispetto alla quale la matrice rappresentativa è diagonale e gli elementi della diagonale principale sono gli autovalori, tutti reali, di \mathcal{I}_G . Inoltre:

- se gli autovalori sono tutti distinti, i relativi autospazi hanno dimensione 1,
- se due autovalori sono uguali ed il terzo diverso, l'autospazio relativo all'autovalore doppio ha dimensione 2,
- se tutti gli autovalori sono uguali $\mathcal{I}_G = \lambda \mathbf{I}$.
- per la positività di \mathcal{I}_G , i suoi autovalori sono tutti positivi, infatti se \mathbf{w} è un autovettore di \mathcal{I}_G , corrispondente all'autovalore λ , si ha

$$0 < \mathbf{w} \cdot \mathcal{I}_G(\mathbf{w}) = \lambda |\mathbf{w}|^2 \Rightarrow \lambda > 0.$$

Una base ortonormale di autovettori di \mathcal{I}_G è naturalmente fissa rispetto ad S (la distribuzione di massa intorno a G e quindi \mathcal{I}_G non cambiano rispetto ad S). Sia (\mathbf{u}_i) una tale base, che viene detta base centrale d'inerzia ¹⁵,

¹⁵C'è una stretta connessione tra le direzioni degli autovettori di \mathcal{I}_G e le simmetrie del solido in questione, vedi Appendice C

A, B, C siano gli autovalori di \mathcal{I}_G e p, q, r le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a tale base, allora si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{L}'' &= \mathcal{I}_G(\boldsymbol{\omega}) = Ap\mathbf{u}_1 + Bq\mathbf{u}_2 + Cr\mathbf{u}_3, \\ K'' &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).\end{aligned}$$

Seguendo un ragionamento del tutto analogo a quello precedente, si mostra che in un moto rigido con un punto fisso O (scelto, al solito, come origine dei riferimenti fisso e solidale) si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_O &= Ap\mathbf{u}_1 + Bq\mathbf{u}_2 + Cr\mathbf{u}_3, \\ K &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),\end{aligned}$$

con (\mathbf{u}_i) base ortonormale di autovettori di \mathcal{I}_O (è detta base principale d'inerzia) e con ovvio significato degli altri simboli. Grazie al Teorema 22 ed a quello di König, si possono poi trovare \mathbf{L}_G e K per un generico moto rigido.

2.18 Significato geometrico delle matrici d'inerzia

Sia a un asse ed \mathbf{a} il suo versore, per un corpo S si definisce momento d'inerzia rispetto all'asse a la quantità

$$\mathcal{I}_a := \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \delta^2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

con δ distanza del generico punto $P \in S$ dall'asse, vedi Figura 2.1. Notiamo che se A è un qualsiasi punto dell'asse, la suddetta distanza è data da

$$\delta(\mathbf{r}') = |(P - A) \wedge \mathbf{a}|.$$

Allora

$$\mathbf{a} \cdot \mathcal{I}_A(\mathbf{a}) = \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |(P - A) \wedge \mathbf{a}|^2 d\mathbf{r}' = \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \delta^2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathcal{I}_a.$$

In particolare, se si scelgono come versori quelli di una terna ortonormale (\mathbf{e}_i) , ed \tilde{O} è un qualsiasi punto, si ha

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathcal{I}_{\tilde{O}}(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i)_k \mathcal{I}_{\tilde{O}_{km}} (\mathbf{e}_i)_m = \delta_{ik} \mathcal{I}_{\tilde{O}_{km}} \delta_{im} = \mathcal{I}_{\tilde{O}_{ii}},$$

dove non è sottintesa alcuna sommatoria sull'indice i , $i \in \{1, 2, 3\}$. Quanto scritto sopra mostra che la componente ii di $\mathcal{I}_{\tilde{O}}$ rispetto alla base (\mathbf{e}_i)

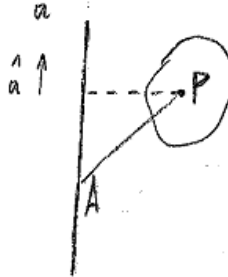


Figura 2.1: Momento d'inerzia rispetto ad un asse

rappresenta il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per \tilde{O} e parallelo ad \mathbf{e}_i .

Gli altri elementi della matrice rappresentativa

$$\mathcal{I}_{\tilde{O}_{ij}} = - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (x_i - x_{\tilde{O}_i})(x_j - x_{\tilde{O}_j}) d\mathbf{r}', \quad i \neq j,$$

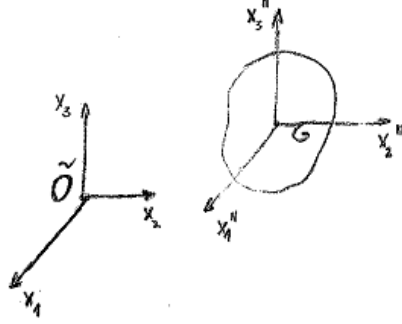
vengono chiamati prodotti d'inerzia e non hanno un'interpretazione altrettanto immediata.

Concludiamo questo paragrafo con il seguente

Teorema 24 (di Huygens) Se \mathcal{I}_G è il tensore d'inerzia rispetto al baricentro, quello rispetto ad un qualsiasi altro punto \tilde{O} è dato da

$$\mathcal{I}_{\tilde{O}} = \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{\tilde{O}}^G,$$

dove $\mathcal{I}_{\tilde{O}}^G$ è il tensore d'inerzia rispetto ad \tilde{O} che avrebbe G se in esso fosse concentrata tutta la massa di S .



Dimostrazione ¹⁶ Per semplicità prenderemo \tilde{O} come origine, allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\tilde{O}ij} &= \int_{C'} \rho [(x_k)^2 \delta_{ij} - x_i x_j] d\mathbf{r}' \\
&= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \{ [(x_k - x_{G_k})^2 + x_{G_k}^2 + 2x_{G_k}(x_k - x_{G_k})] \delta_{ij} - (x_i - x_{G_i})(x_j - x_{G_j}) - x_{G_i} x_{G_j} - (x_i - x_{G_i}) x_{G_j} - x_{G_i} (x_j - x_{G_j}) \} d\mathbf{r}' \\
&= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(x_k - x_{G_k})^2 \delta_{ij} - (x_i - x_{G_i})(x_j - x_{G_j})] d\mathbf{r}' \\
&\quad + m (x_{G_k}^2 \delta_{ij} - x_{G_i} x_{G_j}),
\end{aligned}$$

¹⁶Una dimostrazione più elegante che non ricorre a riferimenti è la seguente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\tilde{O}} &= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - \tilde{O})] \cdot [(P - \tilde{O})] \mathbf{I} d\mathbf{r}' - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - \tilde{O})] \otimes [(P - \tilde{O})] d\mathbf{r}' \\
&= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - G) + (G - \tilde{O})] \cdot [(P - G) + (G - \tilde{O})] \mathbf{I} d\mathbf{r}' \\
&\quad - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') [(P - G) + (G - \tilde{O})] \otimes [(P - G) + (G - \tilde{O})] d\mathbf{r}' \\
&= \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |P - G|^2 \mathbf{I} d\mathbf{r}' + 2 \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \cdot (G - \tilde{O}) \mathbf{I} d\mathbf{r}' + \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') |G - \tilde{O}|^2 \mathbf{I} d\mathbf{r}' \\
&\quad - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \otimes (P - G) d\mathbf{r}' - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \otimes (G - \tilde{O}) d\mathbf{r}' \\
&\quad - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (G - \tilde{O}) \otimes (P - G) d\mathbf{r}' - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (G - \tilde{O}) \otimes (G - \tilde{O}) d\mathbf{r}' \\
&= \mathcal{I}_G + \mathcal{I}_{\tilde{O}}^G
\end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned}
\int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \cdot (G - \tilde{O}) d\mathbf{r}' &= (G - \tilde{O}) \cdot \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) d\mathbf{r}' = 0, \\
\int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \otimes (G - \tilde{O}) d\mathbf{r}' &= \left(\int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) d\mathbf{r}' \right) \otimes (G - \tilde{O}) = \mathbf{0}, \\
\int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (G - \tilde{O}) \otimes (P - G) d\mathbf{r}' &= (G - \tilde{O}) \otimes \left(\int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) d\mathbf{r}' \right) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

per la definizione di baricentro.

dove si è sfruttato il fatto che

$$\int_{C'} \rho(x_k - x_{G_k}) d\mathbf{r}' = m(x_{G_k} - x_{G_k}) = 0.$$

2.19 Schematizzazione delle forze che agiscono su un corpo rigido

Le forze esterne che agiscono su un corpo rigido S vengono distinte in *forze attive* e *reazioni vincolari*. Le prime possono a loro volta essere di due tipi: forze concentrate e forze di volume o di massa.

Una forza concentrata¹⁷ è rappresentata da un vettore applicato $(\bar{P}, \mathbf{F}(\mathbf{r}(\bar{P}), \mathbf{v}(\bar{P}), t))$ con \bar{P} punto di S . Una forza di volume è, invece, distribuita con continuità sul volume del corpo (è una forza a distanza, quale la forza gravitazionale, quella elettrica, o quella magnetica), pertanto si assume che esista una forza specifica $\mathbf{f}(P, \mathbf{v}, t)$, che sia una funzione continua dei suoi argomenti e rappresenti la forza che agisce per unità di massa del corpo nel punto $P \in S$.

Per quanto detto il risultante ed il momento risultante delle forze attive sono dati da

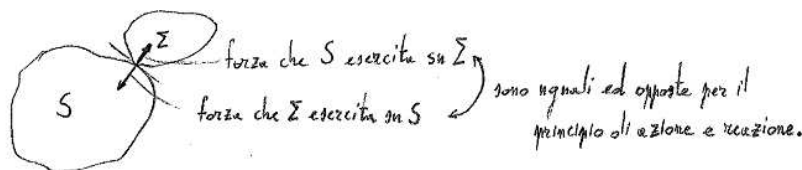
$$\mathbf{R}^{(a)} = \sum_{A=1}^{k_1} \mathbf{F}_A + \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{f}(\mathbf{r}', \mathbf{v}(\mathbf{r}'), t) d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{M}_O^{(a)} = \sum_{A=1}^{k_1} (P_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{F}_A + \int_{C'} (P - \tilde{O}) \wedge \rho \mathbf{f} d\mathbf{r}'.$$

Le reazioni vincolari sono, invece, quelle forze che si esplicano nel mutuo contatto tra due o più corpi e sono originate dalle forze agenti tra le molecole dei corpi prossime alle superfici di contatto. Essendo queste forze molecolari a raggio d'azione molto corto ($\approx 10^{-8}m$), le reazioni vincolari vengono schematizzate come delle forze di superficie, per le quali si introduce una forza $\mathbf{t}(P, \mathbf{v}, t)$ per unità di superficie. Per la loro stessa natura, queste forze risultano profondamente influenzate dalle deformazioni dei corpi nelle regioni a contatto. Poiché l'ipotesi di rigidità cancella queste deformazioni, risulta impossibile determinare le leggi di forza per le reazioni vincolari, che quindi sono incognite.

Talora il contatto tra due corpi avviene su superfici così piccole che queste

¹⁷ad esempio la forza che agisce su un corpo quando in un suo punto è agganciata una molla ideale il cui secondo estremo è agganciato ad un altro corpo



possono essere schematizzate con un singolo punto e le reazioni vincolari con il risultante Φ delle forze di superficie applicato nel punto di contatto e con una coppia di momento Γ uguale al momento risultante delle forze rispetto al punto di contatto. Il componente di Φ parallelo alla superficie è detto attrito radente e Γ attrito volvente. Allora si ha

$$\mathbf{R}^{(v)} = \sum_{A=1}^{k_2} \Phi_A + \int_{\partial C'} \mathbf{t}(P, \mathbf{v}, t) d\sigma'$$

$$\mathbf{M}_{\tilde{O}}^{(v)} = \sum_{A=1}^{k_2} (P_A - \tilde{O}) \wedge \Phi_A + \sum_{A=1}^{k_2} \Gamma_A + \int_{\partial C'} (P - \tilde{O}) \wedge \mathbf{t} d\sigma'.$$

con ovvio significato dei simboli. Nonostante nello schema dei continui rigidi non si possano determinare le leggi di forza delle reazioni vincolari, \mathbf{t} , Φ e Γ non sono a priori arbitrari. In particolare si ha la seguente

Definizione 4 *I vincoli che agiscono su un corpo rigido S si dicono lisci o privi di attrito se l'attrito volvente è nullo in ogni punto di contatto e le reazioni sono normali alla superficie di S in ogni punto di contatto, inoltre esse sono rivolte verso l'interno di S nel caso in cui S è solo appoggiato al corpo che esplica su di esso la reazione vincolare.*

La precedente definizione nasce dall'osservazione sperimentale che l'attrito diminuisce all'aumentare delle levigatezza delle superfici a contatto.

Più complesso è il caso dei vincoli scabri. Ci si limiterà ai contatti puntiformi. Sia π il piano tangente ad S ed a Σ (con Σ si è indicato l'ostacolo a contatto con il corpo) nel loro punto di contatto, ed \mathbf{n} il versore normale rivolto verso l'esterno di S . Si scrivano Φ e Γ come somme dei loro componenti rispettivamente lungo \mathbf{n} e su π :

$$\Phi = \mathbf{N} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \text{ si chiama attrito radente,}$$

$$\Gamma = \Gamma_g + \Gamma_r, \quad \Gamma_g \text{ e } \Gamma_r \text{ si chiamano attrito di giro e di rotolamento,}$$

Definizione 5 *I vincoli agenti su S si dicono scabri se*

- quando S è in quiete rispetto a Σ si ha

$$|\mathbf{A}| \leq f^{(s)} |\mathbf{N}|, \quad |\mathbf{\Gamma}_g| \leq h_g^{(s)} |\mathbf{N}|, \quad |\mathbf{\Gamma}_r| \leq h_r^{(s)} |\mathbf{N}|,$$

con $0 < f^{(s)} < 1$ coefficiente di attrito statico, costante adimensionale dipendente solo dalla natura delle superfici a contatto,

$h_g^{(s)}$, parametro di attrito statico di giro, con le dimensioni di una lunghezza e dipendente dalla natura delle superfici e da $|\mathbf{N}|$,

$h_r^{(s)}$, parametro di attrito statico di rotolamento, dipendente dalle superfici;

- quando S è in moto rispetto a Σ si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= f^{(d)} |\mathbf{N}|, & \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} &= -\frac{\mathbf{v}_\pi}{|\mathbf{v}_\pi|} \\ |\mathbf{\Gamma}_g| &= h_g^{(d)} |\mathbf{N}|, & \frac{\mathbf{\Gamma}_g}{|\mathbf{\Gamma}_g|} &= -\frac{\boldsymbol{\omega}_g}{|\boldsymbol{\omega}_g|}, \\ |\mathbf{\Gamma}_r| &= h_r^{(d)} |\mathbf{N}|, & \frac{\mathbf{\Gamma}_r}{|\mathbf{\Gamma}_r|} &= -\frac{\boldsymbol{\omega}_r}{|\boldsymbol{\omega}_r|}, \end{aligned}$$

con \mathbf{v}_π componente su π di \mathbf{v}_P , velocità di P rispetto a Σ (P punto di contatto di S con Σ), $\boldsymbol{\omega}_g$ ed $\boldsymbol{\omega}_r$ rispettivamente componente lungo \mathbf{n} e su π della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di S rispetto a Σ . Il significato dei vari simboli è analogo a quello che i corrispondenti simboli hanno nel caso statico. Infine $f^{(d)} < f^{(s)}$, $h_g^{(d)} < h_g^{(s)}$ e $h_r^{(d)} < h_r^{(s)}$.

2.20 Equazioni cardinali per un corpo rigido

La validità delle equazioni cardinali, nella forma di equazioni di bilancio, che è stata dimostrata per un sistema di punti materiali, viene *postulata* per un qualsiasi altro sistema materiale.

Per un corpo rigido si ha quindi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(v)}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\bar{O}} + \mathbf{v}_{\bar{O}} \wedge m \mathbf{v}_G &= \mathbf{M}_{\bar{O}}^{(e)} = \mathbf{M}_{\bar{O}}^{(a)} + \mathbf{M}_{\bar{O}}^{(v)}, \end{aligned}$$

dove l'apice a sta per attive e v per vincolari. $\mathbf{R}^{(a)}$ e $\mathbf{M}_{\bar{O}}^{(a)}$ sono funzioni assegnate della configurazione di S , (quindi, ad esempio, di \mathbf{r}_G e degli angoli di Eulero di una terna solidale, che ha origine in G , rispetto a quella dello spazio dove si studia il moto), dell'atto di moto di S (quindi, ad esempio,

di \mathbf{v}_G e di $\boldsymbol{\omega}$), come pure del tempo, in quanto le leggi delle forze attive si suppongono note.

$\mathbf{R}^{(v)}$ e $\mathbf{M}_{\tilde{O}}^{(v)}$ sono invece incogniti anche se non arbitrari. Si ha quindi il problema di ricavare un numero di equazioni scalari pure, vale a dire in cui non compaiano esplicitamente le reazioni vincolari, che sia uguale a quello dei gradi di libertà del corpo.

Questo problema, come vedremo, dipende dal tipo di vincoli che agiscono sul corpo. Ci sono, dei casi in cui esso è risolvibile grazie alla modalità con cui si esplicano certi tipi di vincoli.

2.21 Potenza delle forze applicate ad un corpo rigido

La definizione di lavoro compiuto dalle forze che agiscono su un corpo rigido S è analoga a quella data nel caso di un sistema di punti materiali, con la sommatoria sostituita naturalmente da integrali di volume nel caso di forze di volume e da integrali di superficie nel caso di forze di superficie¹⁸.

Il lavoro compiuto per unità di tempo è detto potenza e solitamente indicato con \mathcal{P} . Qui per semplicità calcoleremo la potenza prodotta da un sistema $\{P_A, \mathbf{F}_A\}_{A=1}^n$ di forze concentrate, ma il risultato che si otterrà è valido in generale.

Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_{A=1}^{k_1} \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{v}_A = \sum_{A=1}^{k_1} \mathbf{F}_A \cdot (\mathbf{v}_{\tilde{O}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_A - \tilde{O})) \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_{\tilde{O}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{\tilde{O}}, \end{aligned}$$

dove \tilde{O} è un qualsiasi punto di S o ad esso solidale, \mathbf{R} ed $\mathbf{M}_{\tilde{O}}$ sono rispettivamente il risultante ed il momento risultante rispetto ad \tilde{O} del sistema di forze considerato.

Se si ricorda che le forze interne (che nel caso di un solido sono quelle che si esplicano tra le sue varie parti) hanno risultante e momento risultante nulli, si deduce che la loro potenza è nulla (attenzione questo è vero perché il moto è rigido!).

In maniera simile a quanto si è visto per un sistema di punti materiali, si può provare che vale il teorema delle forze vive, per il quale

$$\dot{K} = \mathcal{P}^{(a)} + \mathcal{P}^{(v)},$$

¹⁸Vale dire $L(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_C \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{r}' \right) dt$, oppure $L(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\partial C} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\sigma' \right) dt$

cioè la velocità con cui varia l'energia cinetica di un corpo rigido è uguale alla somma della potenza prodotta dalle forze attive e dalle reazioni vincolari, che agiscono sul corpo *dall'esterno*. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) \implies \\
 \dot{K} &= m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{a}_G + \underbrace{(A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r})}_{= \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}_G} \\
 &\stackrel{\text{per le equazioni cardinali}}{=} \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_G^{(e)} = \mathcal{P}^{(e)},
 \end{aligned}$$

con A, B e C , momenti centrali d'inerzia.

Rimane da giustificare un passaggio che abbiamo fatto sopra:

$$(A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}_G,$$

a tal proposito basta notare che, per la (1.26), si ha

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = A \dot{p} \boldsymbol{\epsilon}_1 + B \dot{q} \boldsymbol{\epsilon}_2 + C \dot{r} \boldsymbol{\epsilon}_3 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}_G,$$

con $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ terna centrale d'inerzia, e moltiplicare ambo i membri di quest'ultima scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$.

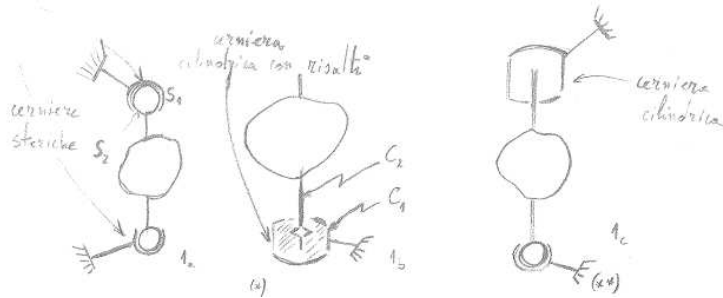


Figura 2.2: Cerniere

2.22 Corpo rigido con un asse fisso privo d'attrito

Un asse fisso può realizzarsi in diversi modi: con due cerniere sferiche ¹⁹ (vedi Figura 2.2_a), con una cerniera cilindrica ²⁰ con risalti che impediscano lo scorrimento (vedi Figura 2.2_b), oppure con una cerniera sferica ed una cilindrica (vedi Figura 2.2_c). In ognuno di questi casi, se i vincoli sono lisci, le reazioni vincolari agenti sul solido debbono essere ortogonali alle superfici di contatto. Ad esempio, nel caso di una cerniera sferica, se P è un qualsiasi punto di contatto tra le sfere della cerniera, la forza \mathbf{t} esercitata dal vincolo per unità di superficie, nel punto P , ha retta d'azione che interseca l'asse fisso (essendo il vincolo liscio, \mathbf{t} è diretto verso il centro della cerniera), che scegliamo come asse x_3 del riferimento fisso e asse x'_3 del riferimento solidale, vedi Figura 2.3. Scegliamo inoltre $O \equiv O'$ (coincidenti con un punto dell'asse fisso), allora $(P - O) \wedge \mathbf{t}$ è ortogonale ad Ox_3 per ogni punto di contatto, il che implica che anche $\mathbf{M}_O^{(v)} = \int_{\sigma'} (P - O) \wedge \mathbf{t} d\sigma'$, con σ' superficie della sfera interna, è ortogonale ad Ox_3 , vale a dire

$$\mathbf{M}_O^{(v)} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (2.14)$$

È possibile dimostrare che in qualsiasi modo si realizzi il vincolo di un asse fisso liscio, la (2.14) è soddisfatta, tanto che potrebbe essere assunta come

¹⁹Una cerniera sferica è costituita da un guscio sferico \mathcal{S}_1 , incompleto ma estendentesi oltre una semisfera, all'interno del quale è posta una seconda sfera cava \mathcal{S}_2 di raggio poco inferiore. \mathcal{S}_1 viene fissata in \mathcal{E}_3 , mentre il corpo è fissato ad \mathcal{S}_2

²⁰Una cerniera cilindrica è costituita da un cilindro cavo \mathcal{C}_1 e da un perno cilindrico \mathcal{C}_2 di raggio leggermente inferiore a quello della cavità. \mathcal{C}_1 è reso solidale ad \mathcal{E}_3 e \mathcal{C}_2 al corpo. Nel caso di una cerniera con risalti, l'appendice o la cavità sono dotate per l'appunto di risalti che impediscono lo scorrimento reciproco

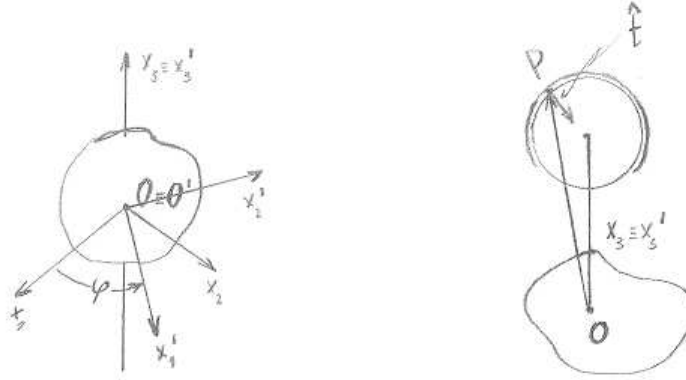


Figura 2.3: Moto rigido con un asse fisso

definizione di asse fisso liscio. Un solido con un asse fisso ha un solo grado di libertà, ad esempio come parametro atto ad individuarne la configurazione si può utilizzare l'anomalia φ di Ox'_1 rispetto a Ox_1 . Allora per risolvere il problema del moto dobbiamo cercare di estrarre dalle equazioni cardinali un'equazione scalare pura. A tal proposito, consideriamo la seconda equazione cardinale (rispetto al polo O) e proiettiamola sull'asse x_3

$$\dot{\mathbf{L}}_O \cdot \mathbf{e}_3 = [\mathbf{M}_O^{(a)} + \mathbf{M}_O^{(v)}] \cdot \mathbf{e}_3 \xrightarrow{\text{per la(2.14)}} \dot{L}_{O,3} = M_{O,3}^{(a)}.$$

Calcoliamo, adesso, il momento angolare per un moto con un asse fisso, $\mathbf{L}_O = \mathcal{I}_O(\boldsymbol{\omega})$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{O,11} & \mathcal{I}_{O,12} & \mathcal{I}_{O,13} \\ \mathcal{I}_{O,21} & \mathcal{I}_{O,22} & \mathcal{I}_{O,23} \\ \mathcal{I}_{O,31} & \mathcal{I}_{O,32} & \mathcal{I}_{O,33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix},$$

da cui si evince che $L_{O,3} = \mathcal{I}_{O,33}\dot{\varphi}$. Notando che $\mathcal{I}_{O,33} = \mathcal{I}_{x_3}$ (momento d'inerzia rispetto all'asse x_3) e che le distanze dei punti del corpo dall'asse x_3 non variano nel tempo, si trova che $\dot{L}_{O,3} = \mathcal{I}_{x_3}\ddot{\varphi}$ e pertanto si ottiene l'equazione del moto

$$\mathcal{I}_{x_3}\ddot{\varphi} = M_{O,3}^{(a)}(\varphi, \dot{\varphi}, t), \quad (2.15)$$

dove il secondo membro dipende da $\varphi, \dot{\varphi}$ e t , perché si è supposto che le forze attive siano funzioni assegnate della configurazione e dell'atto di moto del corpo, nonchè del tempo. La (2.15) è un'equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita $\varphi(t)$, pertanto un noto teorema di

analisi assicura che, se il secondo membro è sufficientemente regolare, essa ammette una ed una sola soluzione che soddisfi le condizioni iniziali

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0,$$

con φ_0 e $\dot{\varphi}_0$ costanti arbitrarie. In definitiva si può concludere che vale la

Proprietà 25 *Sotto l'azione di un assegnato sistema di forze esterne attive, un corpo rigido con un asse fisso liscio può compiere ∞^2 moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la configurazione e l'atto di moto iniziali.*

2.23 Corpo rigido con un punto fisso privo di attrito

Supponiamo che il punto fisso sia realizzato, ad esempio, mediante una cerniera sferica e che pertanto coincida con il centro di questa cerniera, che assumeremo come origine tanto del riferimento fisso, quanto di quello solidale. Se le superfici di contatto tra le sfere della cerniera sono lisce, in ogni punto P di \mathcal{S}_2 a contatto con \mathcal{S}_1 , \mathbf{t} sarà diretta come $P - O$, quindi

$$\mathbf{M}_O^{(v)} = \int_{\sigma'} (P - O) \wedge \mathbf{t} \, d\sigma' = \mathbf{0}.$$

Allora, la seconda equazione cardinale scritta con O come polo, diventa

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(a)}.$$

I gradi di libertà del corpo rigido S , essendo O fisso, sono tre, basta infatti conoscere gli angoli di Eulero della terna solidale $\{O, (\boldsymbol{\epsilon}_i)\}$ rispetto a quella fissa $\{O, (\mathbf{e}_i)\}$ per individuare la configurazione di S ad un dato istante.

Se come terna solidale si sceglie una terna principale d'inerzia, si ha

$$\mathbf{L}_O = A p \boldsymbol{\epsilon}_1 + B q \boldsymbol{\epsilon}_2 + C r \boldsymbol{\epsilon}_3,$$

e, ricordando che $\frac{d\boldsymbol{\epsilon}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon}_i$, $i = 1, 2, 3$, (formule di Poisson, con $\boldsymbol{\omega}$ velocità angolare di S)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= A \dot{p} \boldsymbol{\epsilon}_1 + B \dot{q} \boldsymbol{\epsilon}_2 + C \dot{r} \boldsymbol{\epsilon}_3 + \underbrace{(p \boldsymbol{\epsilon}_1 + q \boldsymbol{\epsilon}_2 + r \boldsymbol{\epsilon}_3)}_{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underbrace{(A p \boldsymbol{\epsilon}_1 + B q \boldsymbol{\epsilon}_2 + C r \boldsymbol{\epsilon}_3)}_{\mathbf{L}_O} \\ &= A \dot{p} \boldsymbol{\epsilon}_1 + B \dot{q} \boldsymbol{\epsilon}_2 + C \dot{r} \boldsymbol{\epsilon}_3 - (B - C) q r \boldsymbol{\epsilon}_1 - (C - A) p r \boldsymbol{\epsilon}_2 - (A - B) p q \boldsymbol{\epsilon}_3. \end{aligned}$$

Pertanto proiettando la seconda equazione cardinale lungo gli assi della terna principale d'inerzia scelta, si ottiene

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= (\mathbf{M}_O^{(a)})_{1'}(\psi, \varphi, \theta, p, q, r, t), \\ B\dot{q} - (C - A)pr &= (\mathbf{M}_O^{(a)})_{2'}(\psi, \varphi, \theta, p, q, r, t), \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= (\mathbf{M}_O^{(a)})_{3'}(\psi, \varphi, \theta, p, q, r, t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

I secondi membri di queste equazioni dipendono dagli angoli di Eulero, dalle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ e dal tempo, in quanto abbiamo assunto che le forze attive siano funzioni assegnate della configurazione e dell'atto di moto di S , nonché del tempo.

Precedentemente si sono espresse (vedi le (1.20), che sono riscritte sotto) le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella base solidale in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \end{aligned}$$

allora, sostituendo queste ultime e le loro derivate temporali nelle (2.16), si ottiene un sistema di tre equazioni differenziali scalari pure del secondo ordine nelle quali le funzioni incognite sono i tre angoli di Eulero (Equazioni di Eulero).

Alternativamente si possono esprimere $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ (vedi le (1.21), che sono riscritte sotto) in funzione di p, q, r , e degli angoli di Eulero

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= r - \cot \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi), \end{aligned}$$

queste ultime affiancate alle (2.16) costituiscono un sistema, in forma normale, di sei equazioni differenziali del primo ordine nelle sei funzioni incognite $\psi, \theta, \varphi, p, q$ ed r . Pertanto se $\mathbf{M}_O^{(a)}$ è una funzione sufficientemente regolare dei suoi argomenti, questo sistema ammette ∞^6 soluzioni, ognuna delle quali è univocamente determinata una volta che si assegnino le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= \psi_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ p(t_0) &= p_0, \quad q(t_0) = q_0, \quad r(t_0) = r_0. \end{aligned}$$

Vale quindi la seguente

Proprietà 26 *Un corpo rigido con un punto fisso privo di attrito, sotto l'azione di forze attive esterne assegnate, può compiere ∞^6 moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la configurazione e l'atto di moto iniziali del corpo S .*

Tra i moti di un corpo rigido con un punto fisso privo di attrito i più semplici risultano quelli per i quali $\mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{0}$, questi moti vengono detti per inerzia. Maggiori dettagli possono essere trovati nell'Appendice E o sul Rionero o sul Romano.

2.24 Corpo rigido libero

Per un corpo rigido libero è conveniente scrivere la seconda equazione cardinale utilizzando il baricentro G come polo, intanto perché, come si è visto

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{L}'',$$

e poi perché questa equazione è la stessa nel riferimento $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ di \mathcal{E}_3 ed in quello del moto attorno al baricentro. Infatti

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_G = \frac{d''}{dt}\mathbf{L}_G,$$

poiché il moto del riferimento $\{G, x_1'', x_2'', x_3''\}$ è traslatorio rispetto a $\{O, x_1, x_2, x_3\}$, $\frac{d''}{dt}$ essendo la derivata temporale in $\{G, x_1'', x_2'', x_3''\}$, con Gx_i'' parallelo e concorde ad Ox_i , $i = 1, 2, 3$.

Se si vuole scrivere la seconda equazione cardinale in $\{G, x_1'', x_2'', x_3''\}$, si deve considerare che in questo riferimento sono presenti anche le forze di trascinamento, il cui momento risultante rispetto a G è però nullo, infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G^{(\tau)} &= - \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) \wedge \mathbf{a}_G d\mathbf{r}' = \mathbf{a}_G \wedge \int_{C'} \rho(\mathbf{r}') (P - G) d\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{a}_G \wedge m(G - G) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Allora la seconda equazione cardinale, scritta nel riferimento del moto attorno al baricentro, è perfettamente analoga a quella scritta in precedenza, questo moto è infatti un moto rigido con un punto fisso, il baricentro G , con la sola differenza che per un corpo libero

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_G(\mathbf{r}_G, \dot{\mathbf{r}}_G, \psi, \theta, \varphi, p, q, r, t),$$

in quanto la configurazione e l'atto di moto del corpo dipendono anche dalla posizione e dalla velocità di G .

Alle equazioni di Eulero si devono poi affiancare le equazioni per il moto di G , che possono essere scritte come un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine nelle funzioni incognite $((\mathbf{r}_G)_1, (\mathbf{r}_G)_2, (\mathbf{r}_G)_3, (\mathbf{v}_G)_1, (\mathbf{v}_G)_2, (\mathbf{v}_G)_3)$

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{r}}_G)_1 &= (\mathbf{v}_G)_1, \\(\dot{\mathbf{r}}_G)_2 &= (\mathbf{v}_G)_2, \\(\dot{\mathbf{r}}_G)_3 &= (\mathbf{v}_G)_3, \\m(\dot{\mathbf{v}}_G)_1 &= R_1((\mathbf{r}_G)_1, (\mathbf{r}_G)_2, (\mathbf{r}_G)_3, (\mathbf{v}_G)_1, (\mathbf{v}_G)_2, (\mathbf{v}_G)_3, \psi, \theta, \varphi, p, q, r, t), \\m(\dot{\mathbf{v}}_G)_2 &= R_2((\mathbf{r}_G)_1, (\mathbf{r}_G)_2, (\mathbf{r}_G)_3, (\mathbf{v}_G)_1, (\mathbf{v}_G)_2, (\mathbf{v}_G)_3, \psi, \theta, \varphi, p, q, r, t), \\m(\dot{\mathbf{v}}_G)_3 &= R_3((\mathbf{r}_G)_1, (\mathbf{r}_G)_2, (\mathbf{r}_G)_3, (\mathbf{v}_G)_1, (\mathbf{v}_G)_2, (\mathbf{v}_G)_3, \psi, \theta, \varphi, p, q, r, t),\end{aligned}$$

Si è quindi trovato un sistema di dodici equazioni differenziali del primo ordine che, in linea di principio, consente di risolvere il problema della determinazione del moto di un solido libero.

Il problema della determinazione del moto di un solido libero risulta notevolmente semplificato se le forze esterne sono tali che le equazioni cardinali siano disaccoppiate, questo accade se

$$\mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)}(G, \dot{G}, t), \quad \mathbf{M}_G^{(a)} = \mathbf{M}_G^{(a)}(\psi, \theta, \varphi, p, q, r, t),$$

vale a dire se il risultante delle forze esterne (che sono solo attive) è indipendente da argomenti inerenti al moto attorno al baricentro ed il momento risultante delle forze è a sua volta indipendente da argomenti relativi al moto del baricentro. In tal caso si può prima studiare il moto del baricentro e poi il moto attorno al baricentro, sfruttando i risultati noti per il moto di un punto materiale e quelli per i moti sferici.

Un altro caso semplificato è quello in cui si ha solamente $\mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)}(G, \dot{G}, t)$. In questo caso, si può infatti trovare prima il moto del baricentro e sostituire $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_G(t)$ e $\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G(t)$ nella seconda equazione cardinale e risolverla.

Un esempio di quanto detto, si ha nel caso del moto di un satellite nello spazio terrestre-stellare \mathcal{E}_O (con O centro della terra.) Si supponga che \mathcal{E}_O sia inerziale e che il satellite sia schematizzabile con un corpo rigido S soggetto alla sola attrazione gravitazionale terrestre e che questa coincida con quella che la Terra eserciterebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro O . Se con dm indichiamo la massa del generico volume $d\mathbf{r}'$ di S , l'attrazione gravitazionale terrestre agente su di essa è

$$d\mathbf{F} = -\frac{hdmM}{|P-O|^3}(P-O),$$

con h costante gravitazionale, M massa della terra e $P \in dx'$. Ad ogni istante, nella regione di spazio occupata da S , essendo le dimensioni del satellite piccole rispetto al raggio della Terra, si può ritenere che $P - O \approx G - O$, $\forall P \in S$, con G baricentro di S , e quindi integrando si ottiene

$$\mathbf{R} = -\frac{hmM}{|G-O|^3}(G-O),$$

con $m = \int_{C'} dm$ massa di S . Analogamente, si ottiene $\mathbf{M}_G = \mathbf{0}$ e quindi le equazioni del moto del satellite sono

$$\begin{cases} \mathbf{a}_G = -\frac{hM}{|G-O|^3}(G-O), \\ \dot{\mathbf{L}}_G = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ne viene che il moto del baricentro è quello di un punto materiale in un campo centrale ed il moto attorno al baricentro è un moto per inerzia. Un altro caso in cui le equazioni cardinali sono disaccoppiate è quello del moto di un solido S libero pesante nel vuoto. In tal caso, infatti, trascurando le forze centrifughe composte, $\mathbf{R} = m\mathbf{g}$ e $\mathbf{M}_G = \mathbf{0}$, con m massa del solido. La traiettoria del baricentro è quindi una parabola ad asse verticale ed il moto attorno al baricentro è un moto per inerzia.

Capitolo 3

Meccanica Analitica: formulazione lagrangiana

3.1 Introduzione

Consideriamo il moto in uno spazio \mathcal{E}_3 di un sistema materiale S costituito da r corpi S_1, S_2, \dots, S_r , generalmente in contatto tra di loro o con corpi rigidi esterni dei quali si supponga assegnato il moto (ostacoli esterni). I primi p , $0 \leq p \leq r$, di questi corpi siano schematizzabili mediante dei punti materiali, mentre i rimanenti $r - p$ con dei corpi rigidi. Per ogni punto materiale del sistema si scriva l'equazione del moto

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (3.1)$$

con m_i , ed \mathbf{a}_i massa ed accelerazione del punto O_i che rappresenta S_i , $i = 1, \dots, p$, mentre per ogni corpo rigido si scrivano le equazioni cardinali

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_{G_i} &= \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)}, \\ \dot{\mathbf{L}}_{O_i} &= \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)}, \quad i = p + 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (3.2)$$

con m_i massa del corpo S_i e O_i baricentro di S_i , a meno che S_i non abbia dei punti fissi nel qual caso come polo O_i sarà scelto uno di questi punti, $i = p + 1, \dots, r$. Il significato degli altri simboli che appaiono nelle tre equazioni precedenti è quello solito. I risultanti ed i momenti risultanti delle forze attive sono supposti essere delle funzioni assegnate della configurazione e dell'atto di moto di S , oltre che del tempo. Mentre i risultanti ed i momenti risultanti delle reazioni vincolari, che sono $3r + 3(r - p)$ funzioni scalari, sono delle funzioni incognite anche se non arbitrarie. Ne viene

che il numero delle incognite è doppio rispetto al numero delle equazioni (3.1)-(3.2). A queste equazioni vanno aggiunte le condizioni che riflettono i tipi di vincoli agenti sul sistema (assi fissi, punti fissi, etc.) e quelle che traducono le modalità con cui si esplicano i vincoli. In generale, è comunque molto difficile tradurre i tipi di vincoli e le loro modalità di esplicazione in condizioni analitiche.

La meccanica analitica è una formulazione della meccanica dovuta a D'Alembert e Lagrange che fornisce un metodo che consente di pervenire direttamente ad un sistema di equazioni pure nel caso in cui i corpi di S siano soggetti a certi tipi di vincoli.

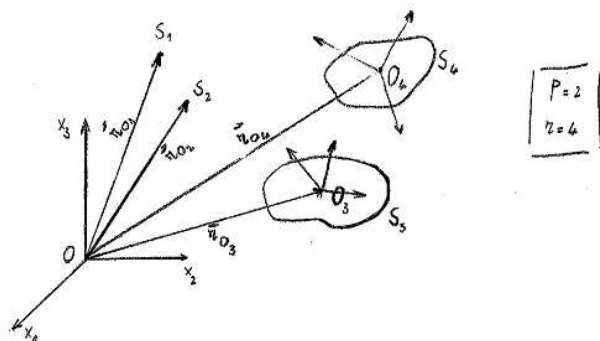
3.2 Coordinate lagrangiane

Analizziamo in maggior dettaglio il problema della determinazione della configurazione del sistema S . Esso richiede la conoscenza della posizione rispetto ad un riferimento fisso in \mathcal{E}_3 di tutti i punti di ognuno dei corpi S_i , $i = 1, \dots, r$. I primi p corpi sono rappresentati da singoli punti, O_i , la cui posizione è individuata dai loro vettori posizione \mathbf{r}_{O_i} , $i = 1, \dots, p$, mentre i vettori posizione \mathbf{r}_i dei punti del corpo S_i , $i = p + 1, \dots, r$, sono esprimibili mediante le relazioni

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O_i} + \mathbf{Q}_i(\psi_i, \theta_i, \varphi_i)\mathbf{r}'_i, \quad i = p + 1, \dots, r, \quad (3.3)$$

l'i-ma delle quali dipende dal vettore posizione \mathbf{r}_{O_i} del polo scelto per il corpo S_i e dagli angoli di Eulero $\psi_i, \theta_i, \varphi_i$ di un riferimento solidale a S_i (con origine in O_i) rispetto al riferimento di \mathcal{E}_3 , tramite l'applicazione di rotazione \mathbf{Q}_i . Nella i-ma relazione compaiono inoltre come parametri i vettori posizione \mathbf{r}'_i dei punti di S_i rispetto al riferimento solidale a questo corpo, per ogni $i = p + 1, \dots, r$. Siano, allora, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \equiv ((\mathbf{r}_{O_1})_1, \dots, (\mathbf{r}_{O_1})_3, \dots, (\mathbf{r}_{O_p})_1, \dots, (\mathbf{r}_{O_p})_3, (\mathbf{r}_{O_{p+1}})_1, \dots, (\mathbf{r}_{O_{p+1}})_3, \psi_{p+1}, \theta_{p+1}, \varphi_{p+1}, \dots, (\mathbf{r}_{O_r})_1, \dots, (\mathbf{r}_{O_r})_3, \psi_r, \theta_r, \varphi_r)$, $l = 3r + 3(r - p)$. Queste sono le variabili indipendenti atte ad individuare la configurazione di S , qualora esso non sia sottoposto ad alcun vincolo. In generale, però, un sistema è sottoposto a vincoli, vale a dire le posizioni e/o le velocità dei corpi che lo costituiscono sono legate da relazioni che ne limitano la variabilità. Ad esempio, se uno dei corpi rigidi, $S_{\bar{t}}$, $\bar{t} \in \{p + 1, \dots, r\}$, avesse un punto fisso, che assumeremmo come origine del riferimento ad esso solidale, dovrebbero essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_{O_{\bar{t}}})_1 = \bar{x}, \\ (\mathbf{r}_{O_{\bar{t}}})_2 = \bar{y}, \\ (\mathbf{r}_{O_{\bar{t}}})_3 = \bar{z}, \end{cases}$$



con $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ coordinate del punto fisso nel riferimento di \mathcal{E}_3 . Oppure, se uno dei corpi rigidi avesse un asse fisso, due punti appartenenti a quest'asse dovrebbero soddisfare condizioni analoghe a quelle scritte sopra (la posizione degli altri punti dell'asse risulterebbe poi assegnata, vista la rigidità del corpo). Se uno dei punti materiali del sistema fosse vincolato a rimanere su una superficie di \mathcal{E}_3 , le sue coordinate dovrebbero soddisfare le equazioni di questa superficie e così via. Bisogna poi tenere conto dell'impenetrabilità dei corpi, questo si traduce in disequazioni che devono essere soddisfatte dalle coordinate dei punti dei corpi.

I vincoli sulle posizioni dei corpi vengono detti olonomi e danno luogo ad un certo numero di equazioni e disequazioni che debbono essere soddisfatte dalle variabili $\lambda_1, \dots, \lambda_l$

$$f_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} < l, \quad (3.4)$$

$$g_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) \geq 0, \quad \beta = 1, \dots, \bar{\beta}, \quad (3.5)$$

quelli espressi da equazioni vengono detti bilaterali¹, gli altri unilaterali². Se in nessuna delle equazioni e disequazioni compare esplicitamente il tempo, i vincoli vengono detti scleronomi, in caso contrario sono chiamati reonomi. Supponiamo che le funzioni f_α , $\alpha = 1, \dots, \bar{\alpha}$, siano di classe C^1 almeno (vale a dire che siano funzioni continue e derivabili dei loro argomenti, con

¹ $\bar{\alpha} < l$ perché altrimenti il sistema non potrebbe muoversi

²Ad esempio, è soggetto ad un vincolo unilaterale, un punto materiale P confinato a muoversi all'interno di una sfera di raggio R . In tal caso, ponendo l'origine del riferimento fisso nel centro della sfera, le coordinate (x, y, z) del punto P debbono soddisfare la disuguaglianza

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

derivate parziali prime continue), la matrice jacobiana di queste funzioni è data da

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_{\bar{\alpha}}}{\partial \lambda_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_{\bar{\alpha}}}{\partial \lambda_l} \end{pmatrix}.$$

Supponiamo, inoltre, che questa matrice abbia caratteristica massima $\bar{\alpha}$, per ogni valore dei suoi argomenti, questa condizione assicura (vedi Appendice F) che le equazioni (3.4) sono indipendenti e si possono risolvere, almeno localmente (per il teorema del Dini sulle funzioni implicite), rispetto ad $\bar{\alpha}$ delle $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, che quindi possono essere espresse in termini delle altre $n = l - \bar{\alpha}$ variabili e del tempo. Se indichiamo con q_1, \dots, q_n queste n variabili, o n qualsiasi altre variabili in corrispondenza biunivoca con queste, si ha

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(q_1, \dots, q_n, t), \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ \lambda_l &= \lambda_l(q_1, \dots, q_n, t), \end{aligned}$$

e quindi per individuare la configurazione di S si ha bisogno di conoscere solo i valori delle n variabili q_1, \dots, q_n , che vengono dette variabili o coordinate lagrangiane. Esse sono indipendenti, pertanto il numero di gradi di libertà di S è n , ma non arbitrarie in quanto sono soggette alle condizioni

$$\tilde{g}_\beta(q_1, \dots, q_n, t) := g_\beta(\lambda_1(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \lambda_l(q_1, \dots, q_n, t), t) \geq 0, \quad \beta = 1, \dots, \bar{\beta},$$

dovute ai vincoli unilaterali.

I vincoli sulle posizioni pongono delle restrizioni indirette sull'atto di moto, infatti derivando le (3.4) rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \bar{\alpha},$$

che sono vincoli di mobilità.

Vincoli del tipo

$$a_i(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) \frac{d\lambda_i}{dt} + b(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t) = 0,$$

con $a_i(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t)$, $i = 1, \dots, l$, e $b(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t)$ funzioni almeno continue dei loro argomenti, tali che non esista una funzione f per la quale $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} = a_i$

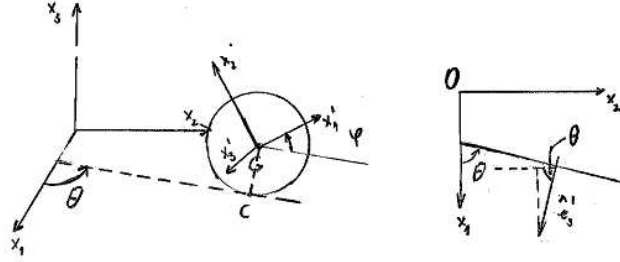


Figura 3.1: Disco che rotola senza strisciare

e $\frac{\partial f}{\partial t} = b$, impongono invece all'atto di moto restrizioni che non provengono da vincoli sulle posizioni e sono per questo detti anolonomi.

Un esempio di quest'ultimo tipo di vincoli, è dato da un disco di raggio r che rotola senza strisciare su un piano orizzontale mantenendosi verticale. Chiamiamo π il piano del disco e sia Ox_1x_2 un riferimento fisso rispetto al piano orizzontale, mentre siano G il centro del disco e $Gx'_1x'_2$ un riferimento ad esso solidale. Gli assi Ox_3 e Gx'_3 restano automaticamente identificati, vedi Figura 3.1. Il disco ha quattro gradi di libertà, perchè la sua posizione è individuata dalle coordinate del baricentro (x_{G1}, x_{G2}, r) , dall'angolo φ che l'asse Gx'_1 forma con il piano Ox_1x_2 e dall'angolo θ che il piano π forma con il piano Ox_1x_3 . Se C è il punto di contatto del disco con il piano orizzontale, poiché il disco rotola senza strisciare, deve aversi $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$. Allora per la formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi, segue

$$\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge (C - G) = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{v}_G = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2$ e $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \boldsymbol{\epsilon}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}_3$, quest'ultima segue dal fatto che la rotazione del disco è composta da una rotazione attorno all'asse $\boldsymbol{\epsilon}_3$ ed una attorno all'asse \mathbf{e}_3 . Inoltre, avendosi $C - G = -r \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\epsilon}_3 = \sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2$, e $\boldsymbol{\omega} \wedge (C - G) = (\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_1 - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_2 + \dot{\theta} \mathbf{e}_3) \wedge (-r \mathbf{e}_3) = r \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_2$, il vincolo di rotolamento puro è in definitiva espresso dalle condizioni

$$\dot{x}_1 + r \dot{\varphi} \cos \theta = 0, \quad \dot{x}_2 + r \dot{\varphi} \sin \theta = 0,$$

che non sono riconducibili ³ ad espressioni della forma $\frac{d}{dt} f(x_1, x_2, \theta, \varphi, t) = 0$ a meno che, ad esempio, non si imponga l'ulteriore vincolo $\theta = \text{cost}$.

³Le corrispondenti forme differenziali non soddisfano le condizioni necessarie e sufficienti di integrabilità

3.3 Velocità ed accelerazione lagrangiane

Da quanto si è visto nel paragrafo precedente, per un sistema vincolato S , il vettore posizione di un suo generico punto è espresso da una funzione del tipo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_n, t),$$

dove il tempo compare esplicitamente solo se i vincoli bilaterali sono reonomi, si noti che se il punto appartiene al corpo rigido S_i , \mathbf{r} dipende anche dai parametri \mathbf{r}'_i , $i \in \{p+1, \dots, r\}$. Quindi il moto di S risulta completamente assegnato se si conoscono le funzioni

$$q_h = q_h(t), \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

che si chiamano equazioni finite del moto di S in coordinate lagrangiane. Indicato con \mathcal{E}_n uno spazio puntuale affine euclideo di dimensione n e con $\{\mathcal{O}, (\mathbf{e}_i)_{i=1}^n\}$ un riferimento ortonormale fisso di questo spazio, ad ogni configurazione del sistema, individuata da (q_1, \dots, q_n) , possiamo associare un punto \mathcal{P} di \mathcal{E}_n mediante la

$$\mathcal{P} - \mathcal{O} = q_i \mathbf{e}_i,$$

\mathcal{E}_n viene chiamato spazio delle configurazioni del sistema S . Al variare di t \mathcal{P} descriverà una curva in \mathcal{E}_n di equazioni parametriche (3.6).

La velocità di un generico punto di S è data da

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}(q_i, \dot{q}_i, t), \\ d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt, \end{cases}$$

e la sua accelerazione da

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

dove

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_h \partial t} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h}(q_i, t) \right], \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}, \quad h = 1, \dots, n,$$

si noti che i termini delle espressioni precedenti, che sono sottolineati, sono nulli nel caso in cui i vincoli bilaterali siano scleronomi. Le espressioni della velocità e dell'accelerazione scritte sopra vengono dette espressioni lagrangiane di queste grandezze. I vettori di E_n di componenti $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ e $(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n)$ nella base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ rappresentano la velocità e l'accelerazione con cui si muove il punto \mathcal{P} dello spazio delle configurazioni, indicheremo queste n-ple di \mathbb{R}^n rispettivamente con \dot{q} e \ddot{q} , mentre con q indicheremo la n-ple $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

3.4 Spostamenti possibili e virtuali

Indichiamo con $\mathcal{C}^{(q)}$ una configurazione del sistema S nello spazio \mathcal{E}_3 , che sia consentita dai vincoli (sia bilaterali che unilaterali) all'istante t , cioè tale il vettore posizione del generico punto del sistema sia dato da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$, e che, se sul sistema agiscono anche dei vincoli unilaterali, le coordinate lagrangiane soddisfino le condizioni

$$g_\beta(q, t) \geq 0, \beta = 1, \dots, \bar{\beta},$$

dove, con un lieve abuso di notazione si è omessa la tilde sulle g . Uno spostamento infinitesimo di S dalla suddetta configurazione $\mathcal{C}^{(q)}$ ad una $\mathcal{C}^{(q+dq)}$, che sia consentita dai vincoli all'istante $t+dt$, cioè tale che il vettore posizione del generico punto del sistema sia dato da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q+dq, t+dt)$, e che, se sul sistema agiscono anche dei vincoli unilaterali, le coordinate lagrangiane $q+dq$ soddisfino le condizioni

$$g_\beta(q+dq, t+dt) \geq 0, \beta = 1, \dots, \bar{\beta},$$

viene detto uno spostamento possibile a partire da $\mathcal{C}^{(q)}$. Uno spostamento invece che parta sempre dalla configurazione $\mathcal{C}^{(q)}$, ma che porti il sistema in una configurazione $\mathcal{C}^{(q+\delta q)}$ che sia consentita dai vincoli quali essi sono all'istante t , cioè tale che il vettore posizione del generico punto del sistema sia dato da $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q+\delta q, t)$, e che, se sul sistema agiscono anche dei vincoli unilaterali, le coordinate lagrangiane $q+\delta q$ soddisfino le condizioni

$$g_\beta(q+\delta q, t) \geq 0, \beta = 1, \dots, \bar{\beta},$$

viene detto uno spostamento virtuale. Si indichino gli spostamenti possibili e virtuali di S rispettivamente con $d\mathcal{C}$ e $\delta\mathcal{C}$. Un esempio può aiutare a chiarirsi le idee ed a capire che vi possono essere spostamenti che sono possibili ma non virtuali e viceversa. È questo il caso di un punto materiale che sia

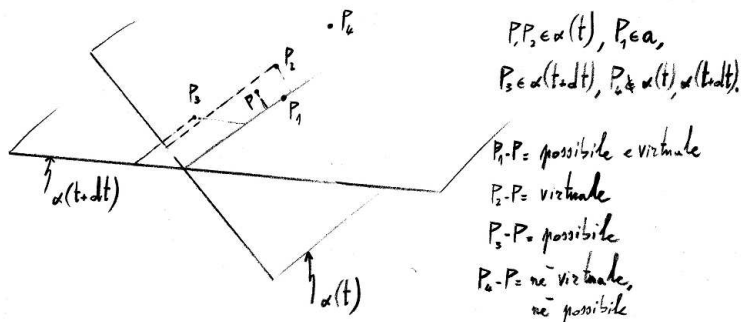


Figura 3.2: Spostamenti possibili e virtuali di un punto materiale vincolato a muoversi su un piano rotante

vincolato a rimanere su un piano α che ruota attorno ad un suo asse a (vedi Figura 3.2)

Naturalmente se i vincoli sono tutti indipendenti dal tempo, spostamenti possibili e virtuali coincidono. Inoltre lo spostamento di un generico punto di S in uno spostamento possibile è dato da, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(q + dq, t + dt) - \mathbf{r}(q, t) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt, \quad (3.9)$$

mentre per uno spostamento virtuale si ha

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(q + \delta q, t) - \mathbf{r}(q, t) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_h} \delta q_h. \quad (3.10)$$

Si noti che tra gli spostamenti possibili c'è anche quello elementare (o effettivo) che corrisponde a $dq = \dot{q}dt$ con \dot{q} velocità di \mathcal{P} all'istante t . Con $-\delta\mathcal{C}$ si indica lo spostamento che si ottiene da $\delta\mathcal{C}$ sostituendo $\delta\mathbf{r}$ con $-\delta\mathbf{r}$, per ogni punto del sistema, vale a dire, considerata la (3.10), sostituendo δq con $-\delta q$, a meno di infinitesimi di ordine superiore. Se accade che anche lo spostamento $-\delta\mathcal{C}$ è uno spostamento virtuale, allora $\delta\mathcal{C}$ viene detto uno spostamento reversibile. Se sul sistema agiscono solo vincoli bilaterali, allora tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili, in quanto in questo caso δq non è soggetto ad alcuna restrizione. Se invece ci sono anche vincoli unilaterali, ogni spostamento effettuato a partire da una configurazione $\mathcal{C}^{(q)}$, nella

quale questi ultimi sono tutti soddisfatti come disequazioni (configurazione ordinaria), è reversibile, infatti se

$$g_\beta(q, t) > 0, \forall \beta \in \{1, \dots, \bar{\beta}\},$$

per la continuità delle funzioni g , esiste un intorno di q in ogni punto del quale le precedenti disuguaglianze sono soddisfatte. Supponiamo invece che il sistema parta da una configurazione nella quale almeno uno dei vincoli unilaterali sia soddisfatto come uguaglianza (configurazione di confine), per fissare le idee sia esso il primo

$$g_1(q, t) = 0,$$

allora se il sistema S passa ad una configurazione ordinaria, relativamente ai vincoli fissati all'istante t , si ha

$$0 < g_1(q + \delta q, t) \approx \frac{\partial g_1}{\partial q_h} \delta q_h \Rightarrow g_1(q - \delta q, t) \approx -\frac{\partial g_1}{\partial q_h} \delta q_h < 0,$$

e quindi lo spostamento non è reversibile.

3.5 Primo e secondo teorema di D'Alembert-Lagrange

Sia S il sistema considerato nei paragrafi precedenti, come si è visto, si ha

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{O_i} = \mathbf{r}_{O_i}(q, t), \\ \mathbf{v}_{O_i} = \mathbf{v}_{O_i}(q, \dot{q}, t), \\ \mathbf{a}_{O_i} = \mathbf{a}_{O_i}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q, t; \mathbf{r}'_i), \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(q, \dot{q}, t; \mathbf{r}'_i), \\ \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t; \mathbf{r}'_i), \end{cases} \quad i = p + 1, \dots, r.$$

Siano inoltre C'_i la regione occupata dal solido S_i nello spazio ad esso solidale e ρ_i la sua densità, $i = p + 1, \dots, r$. Si definiscono forze d'inerzia del sistema S , le forze concentrate

$$(O_i, \mathbf{R}_i^{(m)}), \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_i^{(m)} := -m_i \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

e le forze di volume di forza specifica

$$\mathbf{f}_i^{(m)} := -\mathbf{a}_i = -\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i(q(t), t; \mathbf{r}'_i), \quad i = p + 1, \dots, r.$$

Teorema I (di d'Alembert-Lagrange). Per ogni spostamento virtuale del sistema S , eseguito a partire dalla posizione che il sistema occupa all'istante t e consentito quindi da tutti i vincoli agenti su di esso per come sono all'istante t , il lavoro virtuale totale delle forze d'inerzia, delle forze attive e delle reazioni vincolari è nullo.

Dimostrazione. Per ogni punto materiale O_i , appartenente ad S , il lavoro virtuale è

$$(\mathbf{R}_i^{(m)} + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)}) \cdot \delta \mathbf{r}_{O_i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

ma per l'equazione del moto del punto materiale considerato

$$\mathbf{R}_i^{(m)} + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = -m_i \mathbf{a}_i + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, p,$$

e quindi, per ogni O_i , $i = 1, \dots, p$, il lavoro virtuale è nullo.

Si è visto che, per un corpo rigido, il lavoro di un sistema di forze è determinato dal risultante e dal momento risultante di questo sistema, pertanto utilizzando le due equazioni cardinali per ognuno dei corpi rigidi si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^{(m)} + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} &= - \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{a}_i d\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i^{(v)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{O_i}^{(m)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} &= - \int_{C'_i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O_i}) \wedge \rho_i \mathbf{a}_i d\mathbf{r}'_i + \mathbf{M}_{O_i}^{(a)} + \mathbf{M}_{O_i}^{(v)} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

(ricordando che $O_i = G_i$ se il corpo rigido S_i non ha punti fissi, mentre O_i è uno dei punti fissi qualora il corpo ne abbia almeno uno, si ha in ogni caso $\int_{C'_i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O_i}) \wedge \rho_i \mathbf{a}_i d\mathbf{r}'_i = \dot{\mathbf{L}}_{O_i}$) e quindi anche il lavoro virtuale su ogni corpo rigido risulta nullo, il che completa la dimostrazione del teorema.

Teorema II (di d'Alembert-Lagrange). Se sul sistema in istudio agiscono vincoli olonomi lisci, il lavoro complessivo delle reazioni vincolari, per ogni spostamento virtuale di S , eseguito a partire dalla posizione che il sistema occupa all'istante t e consentito quindi da tutti i vincoli agenti su di esso per come sono all'istante t , è non negativo

$$\delta L^{(v)} \geq 0.$$

Per dare un'idea di come si arrivi a questa conclusione, si considerino due casi particolari. Il primo in cui il sistema S sia costituito da un solo solido ed il vincolo si riduca anch'esso ad un unico solido \mathcal{S} (il vincolo dipende dal tempo se \mathcal{S} è in moto rispetto ad \mathcal{E}_3) (vedi Figura 3.3). Si supponga



Figura 3.3: Solido a contatto con un vincolo esterno

che ad un certo istante i solidi siano in contatto in un punto. La reazione vincolare Φ , che S esercita su S' , essendo il vincolo liscio ed i solidi solamente a contatto, è normale al piano di contatto e diretta verso l'interno di S . Poiché gli spostamenti da considerare sono quelli virtuali, il vincolo deve essere “congelato” nella posizione da esso occupata all'istante considerato. Allora in uno spostamento virtuale il punto di S che occupa la posizione di contatto può compiere solo spostamenti $\delta \mathbf{r}$ tali che $\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \geq 0$, con \mathbf{n} normale interna ad S nel punto di contatto, pertanto

$$\Phi \cdot \delta \mathbf{r} \geq 0.$$

Il secondo caso considerato è quello di un sistema costituito da due soli corpi S_1 ed S_2 . Siano le superfici esterne di questi corpi perfettamente levigate ed il loro contatto si possa considerare puntiforme (l'impenetrabilità tra corpi del sistema S è un vincolo esprimibile mediante disequazioni in cui il tempo non compare esplicitamente ⁴). In un istante in cui questi corpi vengano a contatto, dette Φ_{12} e Φ_{21} le forze esercitate rispettivamente da S_2 su S_1 e da S_1 su S_2 , esse sono ortogonali al piano di contatto, Φ_{12} è diretta verso l'interno di S_1 e $\Phi_{21} = -\Phi_{12}$ (per il principio di azione e reazione). Allora, in uno spostamento virtuale il lavoro di queste reazioni vincolari è uguale a

$$\delta L^{(v)} = \Phi_{12} \cdot \delta P_1 + \Phi_{21} \cdot \delta P_2 = \Phi_{12} \cdot \delta(P_1 - P_2)$$

⁴Tale vincolo può essere espresso dalla seguente condizione:

$$d(P, \partial S_2) \geq d(P, \partial S_1), \quad \forall P \in S_1,$$

con

$$d(P, \partial S_i) := \inf_{Q \in \partial S_i} d(Q, P), \quad i = 1, 2$$

dove P_1 e P_2 sono i punti di S_1 e S_2 a contatto all'istante dato. Essendo le reazioni vincolari e gli spostamenti relativi tra punti (in questo caso $\delta(P_1 - P_2)$) dei vettori oggettivi, il lavoro scritto sopra non dipende dal riferimento in cui lo si calcola. Risulta conveniente calcolarlo in un riferimento solidale ad S_2 , rispetto al quale P_2 non si muove. Un ragionamento analogo a quello precedente consente di concludere che anche in questo caso il lavoro virtuale totale delle reazioni vincolari deve essere non negativo. Si sottolinea ancora una volta che il risultato vale solo per il lavoro totale, infatti, ad esempio, se lo spostamento di P_1 forma un angolo ottuso con la normale al piano di contatto, rivolta verso l'interno di S_1 , il lavoro compiuto da Φ_{12} sarà negativo.

Come si trova scritto sul Levi-Civita, Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale, "dal punto di vista fisico il risultato di questo teorema si legittima facendo vedere che esso si trova verificato (appare cioè conforme all'esperienza) in tanti casi particolari che, per naturale e quasi necessaria induzione si è tratti a ritenerlo valido in generale."

Corollario. Nelle ipotesi del teorema precedente, per ogni spostamento virtuale reversibile, si ha

$$\delta L^{(v)} = 0.$$

Dimostrazione. Se δC è uno spostamento virtuale reversibile anche $-\delta C$ è uno spostamento virtuale, allora, applicando il teorema precedente ai suddetti spostamenti virtuali, si ha

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad -\delta L^{(v)} \geq 0, \Rightarrow \delta L^{(v)} = 0,$$

perché i lavori corrispondenti agli spostamenti δC e $-\delta C$ sono uguali ed opposti.

3.6 Le equazioni di Lagrange

Teorema III. Se il sistema S è a vincoli olonomi lisci, per ogni spostamento virtuale eseguito a partire dalla posizione che il sistema occupa all'istante t e consentito quindi da tutti i vincoli agenti su di esso per come sono all'istante t , deve essere soddisfatta la relazione

$$\delta L^{(m)} + \delta L^{(a)} \leq 0, \quad (\text{Relazione simbolica (pura) della dinamica}). \quad (3.11)$$

Dimostrazione Segue immediatamente dai primi due teoremi.

Scriviamo, adesso, il lavoro virtuale delle forze d'inerzia e di quelle attive in

forma lagrangiana. Si ricordi che

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_{O_i} &\approx \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} \delta q_h, \quad i = 1, \dots, p, \\ \delta \mathbf{r}_i &\approx \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h, \quad i = p+1, \dots, r.\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\delta L^{(m)} &= - \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{a}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \cdot \delta \mathbf{r}_{O_i} - \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{a}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t; \mathbf{r}'_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i d\mathbf{r}'_i \\ &\approx \left(- \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} - \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} d\mathbf{r}'_i \right) \delta q_h = \tau_h \delta q_h,\end{aligned}$$

dove le

$$\tau_h = \tau_h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) := - \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} - \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} d\mathbf{r}'_i, \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

sono dette componenti lagrangiane delle forze d'inerzia.

Mentre per le forze attive⁵, si ha

$$\begin{aligned}\delta L^{(a)} &= \sum_{i=1}^p \mathbf{R}_i^{(a)}(q, \dot{q}, t) \cdot \delta \mathbf{r}_{O_i} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{f}_i^{(a)}(q, \dot{q}, t; \mathbf{r}'_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i d\mathbf{r}'_i \\ &\approx \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{f}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} d\mathbf{r}'_i \right) \delta q_h = Q_h \delta q_h,\end{aligned}$$

dove $\mathbf{f}_i^{(a)}$ è il risultante delle forze attive specifiche che agiscono sul solido S_i , $i = p+1, \dots, r$, dal suo esterno e le

$$Q_h = Q_h(q, \dot{q}, t) := \sum_{i=1}^p \mathbf{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{f}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} d\mathbf{r}'_i, \quad h = 1, \dots, n,$$

sono dette componenti lagrangiane delle forze attive.

⁵Per semplicità si sta supponendo che le forze attive, che agiscono sui corpi rigidi, siano solo di volume

Teorema. Per un sistema S a vincoli olonomi, lisci e bilaterali valgono le equazioni di Lagrange

$$\tau_h(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + Q_h(q, \dot{q}, t) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Dimostrazione. Per il teorema III applicato al caso in cui siano presenti solo vincoli bilaterali (per i quali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili), si ha

$$0 = \delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = (\tau_h + Q_h)\delta q_h,$$

da cui, per l'arbitrarietà delle δq_h segue la tesi.

Le equazioni di Lagrange si possono scrivere in una forma più espressiva. Si cominci scrivendo la forma lagrangiana dell'energia cinetica del sistema S

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_{O_i} \cdot \mathbf{v}_{O_i} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i d\mathbf{r}'_i \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial t} \right] \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial t} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] d\mathbf{r}'_i \\ &= \frac{1}{2} a_{hk}(q, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h(q, t) \dot{q}_h + K_0(q, t), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} a_{hk}(q, t) &:= \sum_{i=1}^p m_i \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_k} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} d\mathbf{r}'_i, \\ b_h(q, t) &:= \sum_{i=1}^p m_i \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial t} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} d\mathbf{r}'_i, \\ K_0(q, t) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} d\mathbf{r}'_i. \end{aligned}$$

Si noti che se i vincoli sono fissi, il termine dell'energia cinetica che è lineare in \dot{q} (che si indica con $K_1(q, \dot{q}, t)$) ed il termine $K_0(q, t)$ (indipendente da \dot{q}) sono entrambi nulli. Si può dimostrare inoltre che la forma quadratica $(a_{hk})_{h,k=1}^n$ oltre ad essere evidentemente simmetrica, è anche definita positiva

⁶ e quindi il termine quadratico in \dot{q} ($K_2(q, \dot{q}, t) := \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$) si annulla se e solo se $\dot{q}_h = 0, \forall h = 1, \dots, n$.

Adesso si è nelle condizioni di mostrare che le componenti lagrangiane delle forze d'inerzia si possono esprimere in termini dell'energia cinetica. Nelle espressioni (3.12) delle τ_h compaiono termini del tipo $\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_h}$, che si possono riscrivere nella forma seguente

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_h} \stackrel{\text{per le (3.7)-(3.8)}}{=} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau_h &= - \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_h} d\mathbf{r}'_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(- \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} d\mathbf{r}'_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_h} d\mathbf{r}'_i \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i d\mathbf{r}'_i \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i d\mathbf{r}'_i \right) \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h}. \end{aligned}$$

Allora le equazioni di Lagrange (3.13) si riscrivono nella forma

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial K}{\partial q_h} = Q_h(q, \dot{q}, t), \quad h = 1, \dots, n. \quad (3.14)}$$

Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle n funzioni incognite $q_h(t)$, $h = 1, \dots, n$.

⁶ $a_{hk} \delta q_h \delta q_k = \sum_{i=1}^p m_i |\delta \mathbf{r}_{O_i}|^2 + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i |\delta \mathbf{r}_i|^2 d\mathbf{r}'_i$, che si annulla se e solo se lo spostamento virtuale di tutti i punti di S è nullo, e questo può accadere se e solo se $\delta q_h = 0, \forall h = 1, \dots, n$

Esse possono essere scritte in forma normale, vale a dire possono essere esplicitate rispetto alle derivate seconde, a tal proposito si osservi che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} [a_{hk}(q, t) \dot{q}_k + b_h(q, t)] = a_{hk}(q, t) \ddot{q}_k + \dot{a}_{hk}(q, t) \dot{q}_k + \dot{b}_h(q, t),$$

questa sostituita nelle (3.14) dà

$$a_{hk}(q, t) \ddot{q}_k = Q_h(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial K}{\partial q_h} - \dot{a}_{hk}(q, t) \dot{q}_k - \dot{b}_h(q, t),$$

da cui, essendo $\det(a_{hk}(q, t)) \neq 0$, si trova

$$\ddot{q}_h = F_h(q, \dot{q}, t) := (a^{-1})_{hk} (Q_k + \frac{\partial K}{\partial q_k} - \dot{a}_{kl} \dot{q}_l - \dot{b}_k), \quad h = 1, \dots, n.$$

Pertanto, se le funzioni a secondo membro sono sufficientemente regolari, vale la seguente

Proprietà. Le equazioni di Lagrange ammettono ∞^{2n} soluzioni, tra le quali ne esiste sempre una ed una sola che soddisfi le condizioni iniziali

$$q_h(t_0) = q_h^0, \quad \dot{q}_h(t_0) = \dot{q}_h^0, \quad h = 1, \dots, n,$$

con $q_h^0, \dot{q}_h^0, h = 1, \dots, n$, costanti arbitrarie.

La precedente proprietà ha la seguente interpretazione fisica

Proprietà. Un sistema di corpi schematizzabili con dei punti materiali e dei corpi rigidi, che sia soggetto a vincoli olonomi, lisci e bilaterali, e che si muova sotto l'azione di un assegnato sistema di forze attive, esterne rispetto a ciascun corpo, può compiere ∞^{2n} moti distinti, ciascuno dei quali risulta determinato assegnando la posizione e l'atto di moto iniziali.

3.7 Sollecitazioni conservative

Sia S il sistema materiale consueto ed i vincoli che agiscono su di esso siano oltre che olonomi, lisci e bilaterali anche fissi.

Definizione. Una sollecitazione attiva, che sia posizionale (dipenda cioè solamente dalla posizione del sistema, per cui $Q_h = Q_h(q), h = 1, \dots, n$), si dice conservativa se esiste una funzione $V(q)$ ⁷, detta potenziale, tale che

$$Q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

⁷definita a meno di una costante additiva arbitraria

Il lavoro effettivo (corrispondente cioè al moto compiuto effettivamente dal sistema) svolto dalla sollecitazione conservativa è

$$dL^{(a)} = Q_h dq_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} dq_h = dV, \quad dq_h = \dot{q}_h dt,$$

e pertanto è un differenziale esatto. Inoltre dal teorema delle forze vive, si ricava

$$dK = dL^{(a)} + dL^{(v)} = dV,$$

in quanto, essendo lo spostamento effettivo compreso tra gli spostamenti possibili, e coincidendo questi ultimi con quelli virtuali (poiché i vincoli, nel caso in esame, sono indipendenti dal tempo), il lavoro delle reazioni vincolari è nullo.

Si definiscano l'energia potenziale e l'energia meccanica

$$U := -V(q), \quad \mathcal{E} := K(q, \dot{q}) + U(q),$$

si ha allora la seguente

Proprietà. L'energia meccanica di un sistema materiale a vincoli olonomi, lisci, bilaterali e fissi, sul quale agiscono solo sollecitazioni attive conservative, si conserva.

Dimostrazione. $d\mathcal{E} = dU + dK = 0$.

Vale anche quest'altra

Proprietà. Sia S_L il sistema S privato dei suoi vincoli e $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ le variabili atte ad individuarne la posizione, vale a dire le coordinate lagrangiane di S_L . Allora se la sollecitazione attiva agente su S_L è conservativa con potenziale $\mathcal{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, lo è anche per S con potenziale $V(q) = \mathcal{V}(\lambda_1(q), \dots, \lambda_l(q))$.

Dimostrazione. Nel caso del sistema vincolato S il lavoro della sollecitazione attiva è dato da

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= Q_h dq_h = \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial q_h} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{f}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h} d\mathbf{r}'_i \right) dq_h \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \mathbf{R}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{O_i}}{\partial \lambda_j} + \sum_{i=p+1}^r \int_{C'_i} \rho_i \mathbf{f}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \lambda_j} d\mathbf{r}'_i \right) \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_h} dq_h \\ &= \mathcal{Q}_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_h} dq_h = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial q_h} dq_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} dq_h, \end{aligned}$$

le \mathcal{Q}_j , $j = 1, \dots, l$, essendo le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive agenti sul sistema libero.

3.8 Funzione di Lagrange o lagrangiana

Nel caso di un sistema S a vincoli olonomi, lisci, bilaterali e fissi, per il quale la sollecitazione delle forze attive (esterne a ciascuno dei corpi di S) sia conservativa, si definisce la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = K(q, \dot{q}) + V(q).$$

Essendo

$$Q_h = \frac{\partial V}{\partial q_h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

le equazioni di Lagrange assumono la seguente forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Questa forma rimane valida anche in casi più generali, nei quali i vincoli siano dipendenti dal tempo, purchè le forze attive derivino da un potenziale generalizzato $V(q, \dot{q}, t)$, vale a dire

$$Q_h = -\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, questo accade nel caso delle forze apparenti in un riferimento non inerziale od anche della forza magnetica di Lorentz (vedi, ad esempio, Romano, Meccanica Razionale).

3.9 Integrali primi delle equazioni del moto

Sia S un sistema materiale a vincoli olonomi, lisci e bilaterali. Una funzione $f(q, \dot{q}, t)$ si dice un integrale primo delle equazioni di Lagrange se si mantiene costante lungo le soluzioni di queste equazioni. Vale a dire che per qualsiasi $q(t)$ soluzione di queste equazioni deve aversi

$$f(q(t), \dot{q}(t), t) = f(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Un integrale primo esprime quindi una legge di conservazione ed, essendo un'equazione differenziale del primo ordine, può essere vantaggiosamente

sostituito ad una delle n equazioni di Lagrange.

Sia S un sistema meccanico per il quale si possa determinare una funzione di Lagrange \mathcal{L} , si definisce momento coniugato della variabile q_h la funzione

$$p_h := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Una coordinata lagrangiana $q_{\bar{h}}$, con $\bar{h} \in \{1, \dots, n\}$, si dice ciclica se la lagrangiana non dipende da $q_{\bar{h}}$. In tal caso il momento coniugato $p_{\bar{h}}$ è un integrale primo del moto. Infatti, per l'equazione di Lagrange \bar{h} -ma, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dt} p_{\bar{h}} = 0, \Rightarrow p_{\bar{h}}(q(t), \dot{q}(t), t) = p_{\bar{h}}(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0).$$

Si è già visto che, nel caso di sistemi a vincoli olonomi, lisci, bilaterali e fissi, sottoposti a sollecitazioni attive conservative ⁸, si conserva l'energia meccanica. Lo si può mostrare anche come conseguenza diretta delle equazioni di Lagrange. Nel caso in questione $\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k + V(q)$, pertanto $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \stackrel{\text{per le equazioni di Lagrange}}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h \right) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L} \right) = 0,$$

questo significa che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - \mathcal{L}$ è un integrale primo del moto. Mostriamo che questa funzione coincide proprio con l'energia meccanica del sistema, infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{1}{2} a_{km} \dot{q}_k \dot{q}_m + V(q) \right) \dot{q}_h - \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k - V(q) \\ = a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k - \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k - V = K + U = \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.10 Teorema di Noether

Sia data una famiglia di trasformazioni ad un parametro s

$$q_h \xrightarrow{s} q'_h, \quad (3.17)$$

⁸È possibile trovare una generalizzazione di questo risultato al caso di sollecitazioni conservative in senso generalizzato, ad esempio nel Romano, *Meccanica Razionale*, o nel Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*

vale a dire siano assegnate le n funzioni

$$q'_h = q'_h(q, s), \quad h = 1, \dots, n,$$

che fissato s rappresentano una trasformazione di coordinate lagrangiane nello spazio delle configurazioni ⁹. Siano inoltre queste funzioni regolari ed invertibili per ogni valore di s , quindi tali che esistano le funzioni inverse

$$q_h = q_h(q', s), \quad h = 1, \dots, n.$$

Supponendo che ad $s = 0$ corrisponda la trasformazione identica ¹⁰, per s piccolo, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, la trasformazione si può scrivere

$$q_h \rightarrow q_h + \frac{\partial q'_h}{\partial s} s, \quad h = 1, \dots, n.$$

Questa trasformazione delle coordinate implica la seguente trasformazione delle velocità generalizzate

$$\dot{q}_h \rightarrow \dot{q}_h + \frac{\partial^2 q'_h}{\partial t \partial s} s, \quad h = 1, \dots, n.$$

Se il sistema materiale in istudio è a vincoli olonomi, lisci, bilaterali e fissi ¹¹, ed inoltre è conservativo, e quindi ha lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$, si dice che la (3.17) è una trasformazione di simmetria per la lagrangiana, se quest'ultima ha lo stesso valore in (q, \dot{q}) ed in $(q + \frac{\partial q'}{\partial s} s, \dot{q} + \frac{\partial^2 q'}{\partial t \partial s} s)$. Affinché questo accada, poiché, a meno di infinitesimi del secondo ordine rispetto ad s , si ha

$$\mathcal{L}(q + \frac{\partial q'}{\partial s} s, \dot{q} + \frac{\partial^2 q'}{\partial t \partial s} s) = \mathcal{L}(q, \dot{q}) + s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \frac{\partial q'_h}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial^2 q'_h}{\partial t \partial s} \right),$$

è necessario e sufficiente che sia

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \frac{\partial q'_h}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q'_h}{\partial s} \text{ per le equazioni di Lagrange} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) \frac{\partial q'_h}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q'_h}{\partial s} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial q'_h}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

⁹È possibile considerare trasformazioni più generali che dipendano esplicitamente dal tempo

$$q'_h = q'_h(q, s, t), \quad h = 1, \dots, n,$$

e si può anche rendere la trattazione indipendente dal sistema di coordinate usate nello spazio delle configurazioni

¹⁰Cioè $q_h(q', 0) = q'_h$, $h = 1, \dots, n$

¹¹Il teorema rimane vero per sistemi materiali più generali con lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$

Risulta, quindi, dimostrato il seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione (3.17) sia di simmetria per il sistema materiale in questione è che la quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial q'_h}{\partial s}$$

sia un integrale primo del moto.

Pertanto, come ha osservato E. Noether, ad ogni simmetria corrisponde una quantità conservata.

Esempio 1. Consideriamo un sistema materiale costituito da due punti materiali P_1 e P_2 , su ognuno dei quali agisca esclusivamente la forza esercitata dall'altro punto materiale. La forza sia conservativa ed abbia potenziale $V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, con \mathbf{r}_i vettore posizione di P_i , $i = 1, 2$. Allora la lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}),$$

con (x_i, y_i, z_i) componenti del vettore posizione \mathbf{r}_i , $i = 1, 2$. Sia \mathbf{w} di componenti (w_1, w_2, w_3) , un vettore arbitrario di E_3 . Il gruppo delle traslazioni

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 + sw_1 \\ y_1 \rightarrow y_1 + sw_2, \\ z_1 \rightarrow z_1 + sw_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \rightarrow x_2 + sw_1 \\ y_2 \rightarrow y_2 + sw_2, \\ z_2 \rightarrow z_2 + sw_3 \end{cases}$$

è evidentemente un gruppo di simmetria ad un parametro per \mathcal{L} e quindi, per il teorema di Noether, la quantità

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} w_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1} w_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} w_3 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} w_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2} w_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2} w_3 \\ & = (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) w_1 + (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2) w_2 + (m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2) w_3 \end{aligned}$$

è un integrale primo del moto. Data l'arbitrarietà del vettore \mathbf{w} , si conclude che la quantità di moto del sistema si conserva durante tutto il moto. In generale, se la lagrangiana di un sistema materiale è invariante rispetto al gruppo delle traslazioni, allora la quantità di moto del sistema si conserva. Se la lagrangiana è invariante solo rispetto al sottogruppo delle traslazioni lungo una certa direzione, allora si conserva solo la componente lungo quella direzione della quantità di moto.

Esempio 2. Consideriamo un punto materiale in moto sotto l'azione di un

campo di forze conservativo di potenziale $V = V(|P - O|)$, con P posizione del punto materiale e O punto fisso di \mathcal{E}_3 , che sceglieremo come origine. La lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Essa è invariante rispetto al gruppo delle rotazioni. Ad esempio se consideriamo il sottogruppo delle rotazioni attorno all'asse Oz , per angoli θ piccoli, si ha

$$\begin{cases} x \rightarrow x \cos \theta - y \sin \theta \approx x - \theta y \\ y \rightarrow x \sin \theta + y \cos \theta \approx \theta x + y. \\ z \rightarrow z \end{cases}$$

Allora, per il teorema di Noether, la quantità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x'}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y'}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \frac{\partial z'}{\partial \theta} = -m\dot{x}y + m\dot{x}y,$$

che è la componente lungo z del momento angolare, rispetto al polo O , del punto materiale P , è un integrale primo del moto. Analogamente si vede che l'invarianza per rotazioni attorno all'asse Ox (Oy), corrisponde alla conservazione della componente $x(y)$ del momento angolare.

3.11 Equilibrio, stabilità e piccole oscillazioni

Si consideri il consueto sistema S , ed i vincoli che agiscono su di esso siano olonomi, bilaterali, lisci e fissi. Una configurazione \mathcal{C}^* , corrispondente al valore q^* della n-pla di coordinate lagrangiane del sistema, si dice di equilibrio per S , se, posto il sistema in questa configurazione con atto di moto nullo, esso vi rimane indefinitamente. La traduzione analitica di questa definizione è

$$\begin{cases} q(t_0) = q^* \\ \dot{q}(t_0) = 0 \end{cases}, \Rightarrow q(t) = q^*, \forall t > t_0.$$

Vale il seguente

Teorema ¹². Condizione necessaria e sufficiente affinché la configurazione \mathcal{C}^* sia di equilibrio è che le componenti lagrangiane delle forze attive

¹²Esiste un teorema più generale, in cui la sola ipotesi sui vincoli è che essi siano ideali (vale a dire che il loro lavoro virtuale complessivo sia non negativo). In tal caso una configurazione \mathcal{C}^* è di equilibrio, innanzitutto se essa è un moto possibile, vale a dire se esiste una funzione $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_n$, di classe C^2 , tale che \mathcal{C}^* corrisponda a $q(t)$, $\forall t$, cosa

soddisfino le condizioni

$$Q_h(q^*, 0, t) = 0, \quad h = 1, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.18)$$

Dimostrazione. Si considerino le equazioni di Lagrange (3.14). Se \mathcal{C}^* è una configurazione di equilibrio, $q(t) = q^*, \forall t \geq t_0$ deve essere una soluzione di queste equazioni, allora, essendo in questo caso $K \equiv 0$, sono identicamente nulli i primi membri delle equazioni di Lagrange, pertanto lo devono essere anche i secondi, questo significa che deve aversi: $Q_h(q^*, 0, t) = 0, h = 1, \dots, n, \forall t \geq t_0$, il che mostra la necessarietà delle condizioni (3.18).

Viceversa siano soddisfatte le condizioni (3.18), allora è immediato verificare che $q(t) \equiv q^*$ è l'unica soluzione soddisfacente le condizioni iniziali $q(t_0) = q^*, \dot{q}(t_0) = 0$, e quindi è dimostrata anche la parte sufficiente del teorema.

Il sistema di equazioni di Lagrange si può trasformare in un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, introducendo le variabili $v_h := \dot{q}_h, h = 1, \dots, n$, si ha infatti

$$\begin{cases} \dot{q}_h = v_h \\ \dot{v}_h = F_h(q, v) \end{cases}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

dove si è tenuto conto che i vincoli sono fissi e si è supposto che le forze attive non dipendano esplicitamente dal tempo. Un sistema del tipo di quello scritto sopra, vale a dire del primo ordine, in forma normale e con i secondi membri che non dipendono esplicitamente dal tempo si dice autonomo. Lo stato (q^*, v^*) si dice di equilibrio per un tale sistema, se i secondi membri calcolati in corrispondenza di (q^*, v^*) si annullano. È facile vedere che questa definizione, nel caso del sistema (3.19), coincide con quella data sopra, infatti i secondi membri delle prime n equazioni del sistema si annullano se e solo se $v = 0$, inoltre i secondi membri delle seconde n equazioni, calcolati per $q = q^*$ e $v = 0$, sono dati da

$$F_h(q^*, 0) = a_{hk}^{-1}(q^*) \left[Q_k(q, \dot{q}) + \frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_l \right]_{|(q^*, 0)} = a_{hk}^{-1}(q^*) Q_k(q^*, 0)$$

tutt'altro che ovvia quando i vincoli sono reonomi. Poi deve accadere che $\forall t$ il lavoro virtuale delle forze attive (esterne a ciascun corpo) deve essere non positivo per ogni spostamento virtuale del sistema eseguito a partire dalla configurazione \mathcal{C}^* con atto di moto nullo. Questo teorema è noto sotto il nome di *Principio dei lavori virtuali*, ed altro non è che la forma assunta dalla Relazione simbolica della dinamica nel caso particolare della statica (vedi, ad esempio, Cercignani, Spazio, Tempo, Movimento, oppure Levi-Civita, Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*). Da un punto di vista storico questo Principio è, però, antecedente alla Relazione simbolica che ne fu una generalizzazione!

e si annullano se e solo se $Q_h(q^*, 0) = 0$, $h = 1, \dots, n$.

Definizione. Uno stato di equilibrio (q^*, v^*) si dice stabile, se comunque si fissi un suo intorno $I(q^*, v^*)$, esiste un intorno $I_0(q^*, v^*) \subseteq I(q^*, v^*)$ tale che se le condizioni iniziali appartengono all'intorno I_0 , allora la soluzione del sistema (3.19), che soddisfa queste condizioni iniziali, rimane indefinitamente in $I(q^*, v^*)$, vale a dire

$$(q(t_0), v(t_0)) \in I_0(q^*, v^*) \Rightarrow (q(t; q_0, v_0), v(t; q_0, v_0)) \in I(q^*, v^*), \quad \forall t \geq t_0,$$

dove con $(q(t; q_0, v_0), v(t; q_0, v_0))$ abbiamo indicato la suddetta soluzione.

È importante trovare condizioni che assicurino che un punto di equilibrio sia stabile. La situazione più semplice si ha quando il sistema materiale S oltre a essere soggetto a vincoli olonomi, bilaterali, lisci, e fissi, è anche sottoposto a sollecitazioni attive conservative. Notiamo, innanzitutto, che in tal caso una configurazione di equilibrio è un punto stazionario della funzione energia potenziale, infatti si ha $0 = Q_h(q^*) = -\frac{\partial U}{\partial q_h}|_{q=q^*}$, $h = 1, \dots, n$, è vero anche il viceversa. Vale inoltre il seguente

Teorema (criterio di stabilità di Dirichlet). Se q^* è un punto di minimo proprio dell'energia potenziale U , allora la configurazione C^* è una configurazione di equilibrio stabile¹³ per il sistema S .

Dimostrazione. Essendo q^* un punto di minimo (interno al dominio di definizione di U) per l'energia potenziale U , deve essere $Q_h(q^*) = -\frac{\partial U}{\partial q_h}|_{q=q^*} = 0$, $h = 1, \dots, n$, e quindi C^* è una configurazione di equilibrio. Se si considera l'energia meccanica di S , $\mathcal{E} = K(q, v) + U(q)$, segue immediatamente che $(q^*, 0)$ è un punto di minimo proprio per \mathcal{E} , inoltre si può scegliere la costante additiva arbitraria dell'energia potenziale in maniera tale che $U(q^*) = 0$, da cui $\mathcal{E}(q^*, 0) = 0$. Consideriamo un qualsiasi intorno $I(q^*, 0)$, poiché $(q^*, 0)$ è un punto di minimo proprio per \mathcal{E} , esiste un intorno chiuso $\bar{I}_1(q^*, 0) \subseteq I(q^*, 0)$ tale che $\mathcal{E}(q, v) > \mathcal{E}(q^*, 0) = 0$, $\forall (q, v) \in \bar{I}_1(q^*, 0) \setminus \{(q^*, 0)\}$. Se consideriamo la restrizione di \mathcal{E} a $\partial\bar{I}_1(q^*, 0)$, per il teorema di Weierstrass, essa è ivi dotata di minimo, sia allora $\bar{\mu} > 0$ il valore minimo della funzione \mathcal{E} su $\partial\bar{I}_1(q^*, 0)$. Per la continuità di \mathcal{E} , e

¹³Esistono anche dei teoremi che quasi invertono quello di Dirichlet, tra questi enunciamo il seguente

Teorema (primo teorema di Lyapunov). Se l'energia potenziale $U(q_1, \dots, q_n)$ di un sistema conservativo in una posizione di equilibrio non ha un minimo e questa circostanza è riconoscibile dall'analisi del valore locale delle derivate seconde di U , allora la data posizione di equilibrio è instabile.

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, il Gantmacher

poiché $\mathcal{E}(q^*, 0) = 0$, esiste un intorno $I_0(q^*, 0) \subseteq \bar{I}_1(q^*, 0) \subseteq I(q^*, 0)$, tale che $0 < \mathcal{E}(q, v) < \bar{\mu}$, $\forall (q, v) \in I_0(q^*, 0) \setminus \{(q^*, 0)\}$. Mostriamo che se la condizione iniziale $(q_0, v_0) \in I_0(q^*, 0)$, la corrispondente soluzione non può raggiungere $\partial \bar{I}_1(q^*, 0)$ e quindi, a maggior ragione, deve rimanere all'interno di $I(q^*, 0)$. Infatti, per la conservazione dell'energia, si deve avere: $\mathcal{E}(q(t; q_0, v_0), v(t; q_0, v_0)) = \mathcal{E}(q_0, v_0) < \bar{\mu}$, $\forall t \geq t_0$, mentre se ad un istante \bar{t} si verificasse $(q(\bar{t}; q_0, v_0), v(\bar{t}; q_0, v_0)) \in \partial \bar{I}_1(q^*, 0)$, dovrebbe essere $\mathcal{E}(q(\bar{t}; q_0, v_0), v(\bar{t}; q_0, v_0)) \geq \bar{\mu}$, in contraddizione con la precedente.

Si è visto che se una configurazione è di equilibrio stabile, il moto, se le condizioni iniziali sono opportunamente scelte, rimane confinato in “prossimità” di $(q^*, 0)$, vale a dire che la configurazione del sistema si mantiene nelle “vicinanze” di \mathcal{C}^* e l'energia cinetica rimane “piccola”. Si considerino pertanto gli sviluppi in serie di Taylor dell'energia cinetica e potenziale ¹⁴, arrestati al secondo ordine in $\sqrt{(q_h - q_h^*)^2}$ e $\sqrt{\dot{q}_h^2}$, si ha

$$K \approx \frac{1}{2} a_{hk}(q^*) \dot{q}_h \dot{q}_k,$$

$$U \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \Big|_{q=q^*} (q_h - q_h^*)(q_k - q_k^*),$$

Si noti che il primo termine non nullo nello sviluppo dell'energia potenziale è quello di ordine due, per la scelta della costante additiva dell'energia potenziale (tale che $U(q^*) = 0$) e perché, essendo q^* di minimo, in questo punto si annullano tutte le derivate prime. Si definiscano $b_{hk}(q) := \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q)$, $h, k = 1, \dots, n$ e $\eta_h := q_h - q_h^*$, $h = 1, \dots, n$.

In definitiva, a meno di termini del terzo ordine, la lagrangiana del sistema si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a_{hk}(q^*) \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k - \frac{1}{2} b_{hk}(q^*) \eta_h \eta_k.$$

Le equazioni del moto corrispondenti, che si dicono equazioni dei piccoli moti, determinano il moto di S a meno di termini del secondo ordine. Per scriverle è conveniente cambiare la base di E_n . Si noti che la forma quadratica $(a_{hk}(q^*))_{h,k=1}^n$, essendo simmetrica e definita positiva, definisce un prodotto scalare in E_n

$$(u, w) := a_{hk} u_h w_k, \quad u, w \in E_n.$$

¹⁴si supponga inoltre che il minimo di U sia riconoscibile dai valori locali delle sue derivate seconde, vale a dire che la matrice Hessiana di U , valutata in q^* , sia definita positiva

Se si considera, allora, l'equazione generalizzata agli autovalori

$$b_{hk}(q^*)u_k = \lambda a_{hk}(q^*)u_k, \quad h = 1, \dots, n,$$

essendo la forma $(b_{hk}(q^*))_{h,k=1}^n$ simmetrica, esiste almeno una base ortonormale di E_n rispetto alla quale le forme $(a_{hk}(q^*))_{h,k=1}^n$ e $(b_{hk}(q^*))_{h,k=1}^n$ sono rappresentate rispettivamente dalla matrice identità e da una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori positivi di $(b_{hk}(q^*))_{h,k=1}^n$, indicati con λ_h , $h = 1, \dots, n$. Pertanto, indicate con $\bar{\eta}_k$, $k = 1, \dots, n$, (coordinate normali), le trasformate delle η_k , $k = 1, \dots, n$, nella nuova base, la lagrangiana dei piccoli moti si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\bar{\eta}}_h)^2 - \frac{1}{2} \lambda_h (\bar{\eta}_h)^2,$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\ddot{\bar{\eta}}_h = -(\omega_h)^2 \bar{\eta}_h, \quad h = 1, \dots, n, \quad (\text{dove non c'è sommatoria su } h!)$$

dove le $\omega_h := \sqrt{\lambda_h}$, $h = 1, \dots, n$, sono dette pulsazioni caratteristiche di S nella configurazione \mathcal{C}^* . Le precedenti sono le equazioni di n oscillatori armonici disaccoppiati. Quindi, poiché le $q_h - q_h^*$, $h = 1, \dots, n$, sono combinazioni lineari delle $\bar{\eta}_h$, $h = 1, \dots, n$, si può concludere che i piccoli moti attorno ad una configurazione di equilibrio stabile sono combinazioni lineari di oscillazioni armoniche.

3.12 Principio di Hamilton, prima forma

Consideriamo un arbitrario sistema *olonomo*, a vincoli bilateri, con coordinate indipendenti $q = (q_1, \dots, q_n)$ e governato dalla funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. L'integrale

$$W = W(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.20)$$

è detto *azione* (nel senso di Hamilton), durante un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ prefissato. L'azione W è un funzionale¹⁵ che dipende dalla funzione $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

Se si specificano le funzioni $q_h(t), h = 1, \dots, n$, si ottiene un dato moto cinematicamente possibile (vale a dire un moto compatibile con i vincoli). Nello spazio $(n+1)$ -dimensionale (q, t) (spazio delle configurazioni esteso) si considerino tutte le possibili curve, o traiettorie, passanti per due determinati punti di questo spazio $M_0 \equiv (q^0, t_0)$ ed $M_1 \equiv (q^1, t_1)$, in modo tale che risultino fissati i tempi iniziale e finale t_0 e t_1 , e le posizioni q^0 e q^1 corrispondenti. Per il resto i moti siano arbitrari.

Si supponga che tra le traiettorie considerate ve ne sia una $q = \bar{q}(t)$ per la quale siano soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange¹⁶

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

Questa traiettoria viene detta *rettilinea*.

Tutte le altre curve che passano attraverso i punti q^0 e q^1 saranno chiamate traiettorie *tortuose*. Si dimostrerà che la traiettoria *rettilinea* rende stazionaria l'azione W rispetto alle traiettorie *tortuose*. Vediamo, innanzitutto qual è il significato di punto stazionario dell'azione o più in generale di un funzionale.

Definizione 6 Una variazione o deformazione, ad estremi fissi, di una curva $(\bar{q}(t), t)$ nello spazio delle configurazioni esteso è una famiglia di curve ad un parametro $(q(t, s), t)$ tali che

- $q(t, 0) = \bar{q}(t)$,
- $q(t_0, s) = q^0, q(t_1, s) = q^1, \forall s$.

¹⁵Un funzionale è un'applicazione che ha come dominio uno spazio di funzioni (uno spazio i cui elementi sono costituiti da funzioni) e che associa ad ogni funzione un numero reale.

¹⁶nel sistema di equazioni (3.21) e nel seguito $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h}$ sta per $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \Big|_{\bar{q}}$ e così via

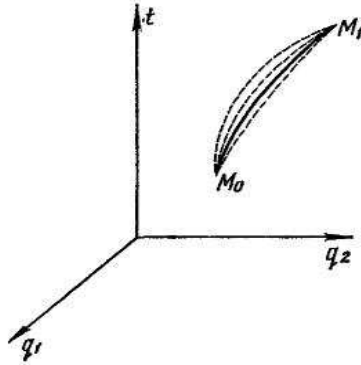


Figura 3.4: Famiglia di curve che passano per due punti.

Data una deformazione di $\bar{q}(t)$, si può definire la funzione

$$W(s) := W(q(t, s)).$$

Allora $W'(0)$ misura quanto rapidamente varia il funzionale quando ci si sposta dalla curva $\bar{q}(t)$ alle curve deformate vicine (s piccolo). Se questa velocità è nulla qualsiasi sia la deformazione considerata ($W'(0) = 0, \forall q(t, s)$), allora si dice che il funzionale è stazionario in $\bar{q}(t)$.

A questo punto siamo nelle condizioni di poter dimostrare il seguente

Teorema 9 (Principio Variazionale di Hamilton) Sia dato un sistema meccanico olonomo, a vincoli bilateri e ad n gradi di libertà, con lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. La traiettoria effettiva (rettilenea) $\bar{q}(t)$ del sistema nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, con valori prescritti agli estremi $q(t_0) = q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ e $q(t_1) = q^1 = (q_1^1, \dots, q_n^1)$, **rende stazionaria l'azione di lagrangiana \mathcal{L}** :

$$W(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.22)$$

Quindi fra tutte le traiettorie cinematicamente possibili durante $[t_0, t_1]$, che hanno gli stessi valori agli estremi e che il sistema potrebbe scegliere, viene selezionata quella che rende stazionaria l'azione di lagrangiana \mathcal{L} .

Dimostrazione. Consideriamo una famiglia arbitraria di traiettorie (una deformazione di $\bar{q}(t)$): $q_h = q_h(t, s)$, $h = 1, \dots, n$, $t \in [t_0, t_1]$, con $-\gamma \leq s \leq \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

L'azione W calcolata per le traiettorie appartenenti a questa famiglia è una

funzione del parametro s :

$$W(s) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[q(t, s), \dot{q}(t, s), t] dt.$$

Calcoliamo la variazione $\delta W (= \frac{dW}{ds} \delta s) = W'(0) \delta s$ dell'azione W , vale a dire il suo differenziale rispetto ad s . Si ha

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_h} \delta q_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \delta \dot{q}_h \right) dt \end{aligned}$$

e, dato che $\delta \dot{q}_h = \delta \frac{d}{dt} q_h(t, s) = \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{d}{dt} q_h(t, s) \right) |_{s=0} \delta s = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial s} q_h(t, s) |_{s=0} \delta s \right] = \frac{d}{dt} \delta q_h$, integrando per parti il secondo termine dell'integrando si trova

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_h} \delta q_h + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \delta q_h \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \delta q_h \right] dt \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \delta q_h \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \right) \delta q_h dt. \end{aligned}$$

Tenendo inoltre conto che la variazione delle traiettorie è nulla agli estremi dell'intervallo d'integrazione, segue:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_h} \right) \delta q_h dt. \quad (3.23)$$

Si vede che in corrispondenza della traiettoria *rettilinea*, cioè della traiettoria che si ottiene per $s = 0$, l'espressione sotto il segno d'integrale è nulla in virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange. Quindi, per la traiettoria *rettilinea*, si ha

$$\delta W = 0,$$

che è l'espressione matematica del principio di Hamilton.

È vero anche il viceversa, vale a dire che se per qualche traiettoria $\bar{q}(t)$ si ha $\delta W = 0$, allora per l'arbitrarietà dei δq_h , $h = 1, \dots, n$, questa traiettoria deve soddisfare le (3.21).

Infatti, si supponga per assurdo che ci sia un $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ ed un $\bar{h} \in \{1, \dots, n\}$ tali che $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_{\bar{h}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_{\bar{h}}} \neq 0$, allora per continuità ci sarà un intorno di \bar{t} nel quale $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_{\bar{h}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_{\bar{h}}}$ manterrà lo stesso segno. Si scelga una deformazione che trasformi solo $\bar{q}_{\bar{h}}(t) \rightarrow \bar{q}_{\bar{h}}(t) + \delta q_{\bar{h}}$, con $\delta q_{\bar{h}} \neq 0$ solo in un intorno

di \bar{t} contenuto nell'intorno suddetto, e con $\delta q_{\bar{h}}$ avente lo stesso segno di $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}}$. Di conseguenza

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} \right) \delta q_{\bar{h}} dt > 0,$$

in quanto la funzione integranda è positiva nel secondo dei suddetti intorni e nulla al di fuori di esso. Questo risultato è in contraddizione col fatto che $\bar{q}(t)$ è un punto stazionario dell'azione, pertanto la dimostrazione è completata.

Poiché dal principio di Hamilton derivano le equazioni di Lagrange in coordinate indipendenti (e viceversa), il principio di Hamilton può essere posto a fondamento della dinamica dei sistemi olonomi, bilaterali. Le traiettorie *rettilinee* possono essere caratterizzate sia mediante le equazioni differenziali del moto in forma lagrangiana, che mediante il principio variazionale di Hamilton. Ad ogni modo c'è una differenza fondamentale tra le equazioni differenziali del moto ed i principi variazionali. Le prime, essendo equazioni differenziali, caratterizzano localmente il moto, mentre il principio variazionale, avendo a che fare con una relazione integrale, caratterizza la traiettoria nella sua interezza.

Si può provare che se il punto M_1 è sufficientemente vicino al punto M_0 , allora una sola traiettoria rettilinea passa attraverso questi punti, ma se la separazione tra questi punti è sufficiente allora due traiettorie o persino un fascio di traiettorie rettilinee può passare per questi punti. La posizione M_1 per cui si verifica questa situazione si chiama fuoco coniugato di M_0 e si indica con M_0^* . È stato provato che il valore dell'azione calcolato in corrispondenza della traiettoria rettilinea da M_0 ad M_1 è di minimo relativo rispetto ai valori calcolati in corrispondenza di quelle tortuose se su di essa non vi è alcun fuoco coniugato ad M_0 (vedi Gantmacher.)

Capitolo 4

Meccanica Analitica: formulazione hamiltoniana

Hamilton propose una formulazione della dinamica di un sistema di corpi, in cui lo stato del sistema invece di essere descritto dalle variabili (q, \dot{q}) è descritto dalle variabili (q, p) , con p n-pla dei momenti coniugati.

Le equazioni di Hamilton costituiscono, dal punto di vista più elementare possibile, semplicemente una conveniente riscrittura delle equazioni di Lagrange come sistema di $2n$ equazioni del primo ordine, con una scelta particolarmente significativa delle variabili. Tale riscrittura delle equazioni di moto risulta tuttavia essenziale per fondare la meccanica statistica e la meccanica quantistica. Infatti, la compatibilità tra probabilità e dinamica, che costituisce uno dei problemi centrali della meccanica statistica, può essere formulata in maniera molto semplice in ambito hamiltoniano piuttosto che in ambito lagrangiano (fondandola sul teorema di Liouville). D'altra parte le regole di quantizzazione (che esprimono il modo in cui si passa dalla meccanica classica a quella quantistica) vengono formulate facendo uso delle parentesi di Poisson, ovvero di una struttura algebrica soggiacente le equazioni di Newton, che viene spontaneamente resa esplicita in ambito hamiltoniano. Infine, il formalismo hamiltoniano risulta particolarmente utile anche in ambito puramente meccanico, in relazione alla teoria delle perturbazioni, il cui sviluppo viene estremamente facilitato facendo uso della tecnica delle trasformazioni canoniche, che pure richiedono di disporre del formalismo hamiltoniano. Le trasformazioni canoniche, tra l'altro, vennero molto utilizzate anche nella prima formulazione della meccanica quantistica, soprattutto ad opera di Born e di Sommerfeld (cfr. Carati, Galgani).

Per mostrare come si passi dalla formulazione di Lagrange a quella di Hamilton, premettiamo il seguente

Teorema (di Donkin). Sia $X(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che goda della proprietà

$$\det \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} \right) \neq 0,$$

e si consideri la trasformazione di coordinate

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Si ha allora che:

1. esiste la trasformazione inversa $x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$, $i = 1, \dots, n$, con

$$Y = x_i y_i - X, \quad (4.2)$$

dove le x_i , $i = 1, \dots, n$, devono essere espresse in funzione delle y_j , $j = 1, \dots, n$

2. inoltre, se la funzione X dipende anche da m parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ovvero

$$X = X(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m),$$

allora anche la funzione Y dipende dagli stessi parametri e si ha:

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Dimostrazione. Le (4.1) rappresentano un sistema di n equazioni, che per il teorema del Dini sulle funzioni implicite (vedi Appendice F) è invertibile poiché lo Jacobiano delle funzioni $\frac{\partial X}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, coincide con l'Hessiano della funzione X rispetto alle variabili x_i , $i = 1, \dots, n$, che, per ipotesi, ha determinante non nullo. È, quindi, possibile esprimere le x_i , $i = 1, \dots, n$, in termini delle y_j , $j = 1, \dots, n$,

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Si consideri la funzione Y definita dalla (4.2) e se ne calcolino le derivate

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} (x_k y_k - X) = x_i + \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k - \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \stackrel{\text{per le (4.1)}}{=} x_i, \\ \implies x_i &= \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

queste ultime relazioni determinano la trasformazione inversa.

Per dimostrare il secondo punto si proceda nel modo seguente. La funzione X dipenda anche da m parametri $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Le (4.1) implicano che anche le $y_i, i = 1, \dots, n$, sono funzioni delle $\alpha_j, j = 1, \dots, m$ e di conseguenza i suddetti parametri sono presenti anche nella trasformazione inversa. Infine, per dimostrare le (4.3) si calcolino esplicitamente le derivate di Y rispetto alle $\alpha_j, j = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (x_k(y, \alpha)y_k - X(x(y, \alpha), \alpha)) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} y_k - \frac{\partial X}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \end{aligned}$$

e quindi per la (4.1),

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

che completa la dimostrazione del teorema.

4.1 Derivazione delle equazioni di Hamilton

Il passaggio dalle variabili lagrangiane a quelle hamiltoniane e la derivazione delle equazioni di Hamilton a partire da quelle di Lagrange (3.15) possono essere fatti utilizzando il teorema di Donkin, mediante la seguente corrispondenza

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathcal{L} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \\ (y_1, \dots, y_n) &\longrightarrow (p_1, \dots, p_n) \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) &\longrightarrow (t, q_1, \dots, q_n) \\ Y = x_i y_i - X &\longrightarrow \mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \end{aligned}$$

dove \mathcal{H} è detta funzione di Hamilton o hamiltoniana del sistema S . Essa è anche chiamata trasformata di Legendre della funzione di Lagrange. Le (4.5) forniscono le equazioni di Hamilton per le q

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le equazioni per le p si ricavano dalle equazioni di Lagrange (3.15) che, per la definizione dei momenti coniugati, si possono scrivere

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

e, quindi, per le (4.3), diventano

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sempre dalle (4.3) si ricava infine relazione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

che sarà utile nel seguito.

4.2 Conservazione dell'energia totale

Per quanto visto nel paragrafo precedente, le equazioni di Hamilton sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

che vengono anche dette equazioni canoniche della meccanica. Nel caso di sistemi a vincoli olonomi, lisci, bilaterali e fissi, sottoposti a sollecitazioni attive conservative ¹, l'hamiltoniana \mathcal{H} coincide con l'energia meccanica, infatti per quanto trovato prima (vedi (3.16))

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = K + U,$$

inoltre, poiché in questo caso \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo, per la (4.6), neanche \mathcal{H} vi dipende. La conservazione dell'energia totale può essere mostrata anche sfruttando le equazioni canoniche, infatti calcolando la derivata temporale totale della funzione di Hamilton si ha ²

$$\frac{d\mathcal{H}(q, p)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \stackrel{\text{per le (4.7)}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0. \quad (4.8)$$

¹questo risultato è vero per sistemi più generali, vedi ad esempio Gantmacher, Lectures in Analytical Mechanics

²più in generale per una hamiltoniana che dipende esplicitamente dal tempo si ha $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$

4.3 Le parentesi di Poisson

Siano $f(q, p, t)$ e $g(q, p, t)$ due funzioni sufficientemente regolari, si chiama *parentesi di Poisson* di queste due funzioni, e si indica con $\{f, g\}$, la funzione definita come segue

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (4.9)$$

Dalla precedente definizione è immediato ricavare che

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = -\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (4.10)$$

Le relazioni (4.10) sono dette parentesi di Poisson *fondamentali*.

Utilizzando le parentesi di Poisson si possono riscrivere le equazioni di Hamilton (4.7) in una forma che elimina l'apparente dissimmetria dovuta al segno

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, \mathcal{H}\}, \\ \dot{p}_i = \{p_i, \mathcal{H}\}, \end{cases} \quad (4.11)$$

l'equivalenza delle precedenti con le (4.7) risulta evidente dalla definizione (4.9).

4.4 Integrali primi del moto e proprietà delle parentesi di Poisson

È possibile caratterizzare gli integrali primi del moto tramite le parentesi di Poisson. Si consideri, infatti, una generica funzione $f(q, p, t)$ e se ne calcoli la derivata temporale:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right),$$

da cui, utilizzando le equazioni di Hamilton (4.7), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dalla (4.12) segue immediatamente che una funzione $f(q, p)$ (che non dipende esplicitamente dal tempo) è un integrale primo se e solo se la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana è nulla.

Dalla definizione segue che le parentesi di Poisson hanno le proprietà

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + g\{f, h\} \\ \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} &= 0, \quad \text{identità di Jacobi.}\end{aligned}$$

Poiché uno spazio vettoriale su cui è definita un'operazione binaria antisimmetrica, lineare e per cui valga l'identità di Jacobi è detto un'algebra di Lie, lo spazio vettoriale delle funzioni regolari con l'operazione binaria definita dalle parentesi di Poisson è un'algebra di Lie.

4.5 Trasformazioni canoniche

Abbiamo visto che in termini delle parentesi di Poisson le equazioni di Hamilton si scrivono

$$\dot{q}_h = \{q_h, \mathcal{H}\}, \quad \dot{p}_h = \{p_h, \mathcal{H}\}.$$

Questa forma è di particolare utilità nella ricerca di trasformazioni delle coordinate nello spazio delle fasi esteso $\{q, p, t\}$ che conservino la struttura canonica delle equazioni di Hamilton.

Cominciamo cercando delle trasformazioni che conservino le parentesi di Poisson. Sia data la trasformazione di variabili

$$\begin{aligned}q_h'' &= q_h''(q, p, t), \\ p_h'' &= p_h''(q, p, t), \\ t'' &= t,\end{aligned}\tag{4.13}$$

differenziabile ed invertibile. Siano $f(q, p, t)$ e $g(q, p, t)$ due funzioni dotate di derivate parziali. Se esse vengono espresse come funzioni delle nuove variabili, si può considerare la parentesi di Poisson di f e g rispetto a queste

$$\{f, g\}'' = \frac{\partial f}{\partial q_h''} \frac{\partial g}{\partial p_h''} - \frac{\partial f}{\partial p_h''} \frac{\partial g}{\partial q_h''}.$$

Si vogliono trovare delle condizioni sulle trasformazioni (4.13), in modo che esse conservino le parentesi di Poisson, vale a dire

$$\{f, g\}'' = \{f, g\}.$$

Definiamo la seguente trasformazione intermedia

$$q'_h = q_h, \quad p'_h = p''_h = p''_h(q, p, t).$$

Questo non è possibile se (4.13) è una trasformazione arbitraria, infatti affinché ciò sia possibile q e p'' devono essere variabili indipendenti atte ad individuare un punto dello spazio delle fasi. Questo accade se e solo se q'' e p sono esprimibili in funzione di esse, pertanto le equazioni

$$p'' = p''(q, p, t), \quad q = q(q'', p'', t'')$$

con le seconde inverse delle (4.13), devono essere risolvibili le prime rispetto alle p e le seconde rispetto alle q'' . Allora per il teorema sulle funzioni implicite, le matrici

$$L_{hk} := \frac{\partial q_h}{\partial q''_k} \quad \text{e} \quad M_{hk} := \frac{\partial p''_h}{\partial p_k}$$

devono essere ovunque non singolari. Ad esempio per la trasformazione

$$q''_h = p_h, \quad p''_h = -q_h,$$

la trasformazione intermedia sarebbe

$$q'_h = q_h, \quad p'_h = -q_h,$$

e queste ultime variabili ovviamente non individuano in maniera non ambigua i punti dello spazio delle fasi. Infatti, si ha

$$\frac{\partial q_h}{\partial q''_k} = 0, \quad \frac{\partial p''_h}{\partial p_k} = 0.$$

Definizione 7 *La trasformazione (4.13) si dice trasversale se le variabili q' e p' possono essere usate come coordinate dello spazio delle fasi.*

Teorema 10 *Sia data una trasformazione trasversale. Condizione necessaria e sufficiente affinché essa conservi le parentesi di Poisson ($\{f, g\} = \{f, g\}''$, $\forall f, g$ definite sullo spazio delle fasi esteso) è che esista una funzione $F : (q', p', t) \rightarrow \mathbb{R}$, detta funzione generatrice, tale che*

$$q''_h = \frac{\partial F}{\partial p'_h}, \quad p_h = \frac{\partial F}{\partial q'_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Dimostrazione. Consideriamo due $\forall f, g$. Si ha ³

$$\frac{\partial g}{\partial q'_h} = \frac{\partial g}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q'_h}}_{=\delta_{hk}} + \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_h} + \frac{\partial g}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial q'_h}}_{=0} = \frac{\partial g}{\partial q_h} + \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_h}, \quad (4.14)$$

ricordando che

$$q_h = q'_h, \quad p_h = p_h(q'_k, p'_k, t'), \quad t = t',$$

e per la stessa ragione

$$\frac{\partial f}{\partial p'_h} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial p'_h}. \quad (4.15)$$

In maniera analoga si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial q'_h} = \frac{\partial g}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p'_h} = \frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} + \frac{\partial f}{\partial p''_h}, \quad (4.17)$$

ricordando che

$$q''_h = q''_h(q'_k, p'_k, t'), \quad p''_h = p'_h, \quad t'' = t'.$$

Adesso, moltiplichiamo la (4.14) e la (4.16) per $\frac{\partial f}{\partial p_h}$ e sommiamo su h , i primi membri delle due nuove espressioni così ottenute sono uguali, quindi dall'uguaglianza dei secondi membri si ha

$$\frac{\partial f}{\partial p_h} \left(\frac{\partial g}{\partial q_h} + \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_h} \right) = \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h}. \quad (4.18)$$

Analogamente, moltiplicando ambo i membri di (4.15) e (4.17) per $\frac{\partial g}{\partial q''_h}$ e sommando, si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial q''_h} \left(\frac{\partial f}{\partial p'_h} + \frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} \right) = \frac{\partial g}{\partial q''_h} \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial p'_h}. \quad (4.19)$$

³Con $\frac{\partial g}{\partial q'_h}$ si intende che la funzione g è prima espressa come funzione di (q', p', t') e poi si varia q'_h mantenendo costanti tutte le q'_k con $k \neq h$, le p' e t' . Analogo è il significato di $\frac{\partial g}{\partial p'_h}$.

Adesso, si scrivano (4.18) (4.19) con $f \leftrightarrow g$

$$\frac{\partial g}{\partial p_h} \left(\frac{\partial f}{\partial q_h} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_h} \right) = \frac{\partial g}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q''_h} \left(\frac{\partial g}{\partial p'_h} + \frac{\partial g}{\partial q''_k} \frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} \right) = \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial p'_h}, \quad (4.21)$$

e si sottraggano la (4.18) dalla (4.20) e la (4.19) dalla (4.21), si ricava

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{\partial p_k}{\partial q'_h} \left(\frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial p_h} \right) + \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h} \left(\frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q''_k} \right), \\ \{f, g\}'' &= \frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} \left(\frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial g}{\partial q''_h} - \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial g}{\partial q''_k} \right) + \frac{\partial p_k}{\partial p'_h} \left(\frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q''_h} \right), \end{aligned}$$

che scambiando $h \leftrightarrow k$ nei prodotti che contengono i fattori sottolineati possono essere riscritte

$$\{f, g\} = \left[\frac{\partial p_k}{\partial q'_h} - \frac{\partial p_h}{\partial q'_k} \right] \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial p_k} + \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h} \left[\frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q''_k} \right], \quad (4.22)$$

$$\{f, g\}'' = \left[\frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} - \frac{\partial q''_h}{\partial p'_k} \right] \frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial g}{\partial q''_h} + \frac{\partial p_h}{\partial p'_k} \left[\frac{\partial f}{\partial q''_k} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q''_k} \right], \quad (4.23)$$

Parte sufficiente Esiste $F(q', p', t')$ tale che: $\frac{\partial F}{\partial q'_h} = p_h$, $\frac{\partial F}{\partial p'_h} = q''_h$, $\forall h = 1, \dots, n$, allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_h}{\partial q'_k} &= \frac{\partial^2 F}{\partial q'_k \partial q'_h} = \frac{\partial p_k}{\partial q'_h} \\ \frac{\partial q''_k}{\partial p'_h} &= \frac{\partial^2 F}{\partial p'_h \partial p'_k} = \frac{\partial q''_h}{\partial p'_k} \\ \frac{\partial p_h}{\partial p'_k} &= \frac{\partial^2 F}{\partial p'_k \partial q'_h} = \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h}, \end{aligned}$$

avendo sfruttato il Teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione.

Sostituendo questi risultati nelle (4.22), (4.23) si vede che i secondi membri sono uguali, pertanto $\{f, g\} = \{f, g\}''$.

Parte necessaria Sia $\{f, g\} = \{f, g\}''$, $\forall f, g$. Si prenda $f = p_l''$, $g = q_m$, poiché i primi membri di (4.22) e (4.23) sono uguali, deve essere

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial p_k}{\partial q'_h} - \frac{\partial p_h}{\partial q'_k} \right] \frac{\partial p_l''}{\partial p_h} 0 + \frac{\partial q_k''}{\partial q'_h} \left[0 - \frac{\partial p_l''}{\partial p_h} \frac{\partial q_m}{\partial q_k''} \right] \\ & = 0 + \frac{\partial p_h}{\partial p'_k} \left[0 - \frac{\partial p_l''}{\partial p_h} \frac{\partial q_m}{\partial q_k''} \right], \end{aligned}$$

che può essere riscritta

$$\frac{\partial p_l''}{\partial p_h} \left(\frac{\partial p_h}{\partial p'_k} - \frac{\partial q_k''}{\partial q'_h} \right) \frac{\partial q_m}{\partial q_k''} = 0.$$

Essendo le matrici $\left(\frac{\partial q_m}{\partial q_k''} \right)$ e $\left(\frac{\partial q_k''}{\partial q'_h} \right)$ invertibili, ne viene che

$$\frac{\partial p_h}{\partial p'_k} = \frac{\partial q_k''}{\partial q'_h}. \quad (4.24)$$

Si prendano, adesso, $f = p_l$ e $g = p_m''$, in maniera perfettamente analoga a prima, si trova

$$\left[\frac{\partial p_k}{\partial q'_l} - \frac{\partial p_l}{\partial q'_k} \right] \frac{\partial p_m''}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k''}{\partial q'_h} \left[\frac{\partial p_l}{\partial q_k''} \frac{\partial p_m''}{\partial p_h} \right] = 0 + \frac{\partial p_h}{\partial p'_k} \left[\frac{\partial p_l}{\partial q_k''} \frac{\partial p_m''}{\partial p_h} \right],$$

e quindi, per la (4.24) e per l'invertibilità della matrice $\left(\frac{\partial p_m''}{\partial p_k} \right)$,

$$\frac{\partial p_k}{\partial q'_l} = \frac{\partial p_l}{\partial q'_k}. \quad (4.25)$$

Infine, prendendo $f = q_l$ e $g = q_m''$, si ottiene

$$\frac{\partial q_m''}{\partial p'_h} = \frac{\partial q_h''}{\partial p'_m}. \quad (4.26)$$

Si consideri la forma differenziale

$$\omega = p_k(q', p', t') dq'_k + q_k''(q', p', t') dp'_k,$$

le (4.24)–(4.26) implicano che ω è esatta, pertanto esiste $F(q', p', t')$ tale che:

$$\frac{\partial F}{\partial q'_k} = p_k, \quad \frac{\partial F}{\partial p'_k} = q_k''.$$

Vediamo, adesso, come si costruisce una trasformazione trasversale.

1. Si parte da una famiglia di funzioni di q

$$S = S(q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_n, t)$$

ad n parametri k_1, \dots, k_n .

2. Si costruiscono le funzioni p'_1, \dots, p'_n di q, p, t risolvendo le equazioni

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \Big|_{k=p'}$$

Pertanto $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial k_l}\right)$ deve essere ovunque non singolare.

3. Si definisce il sistema intermedio di coordinate

$$q'_k = q_k, p'_k, t' = t$$

e la funzione

$$F(q', p', t') = S(q, k, t) \Big|_{\begin{array}{l} q = q' \\ k = p' \\ t = t' \end{array}}$$

4. Si definiscono le coordinate finali mediante le

$$q''_k = \frac{\partial F}{\partial p'_k}, \quad p''_k = p'_k, \quad t'' = t'.$$

La trasformazione identica ha funzione generatrice

$$\begin{aligned} S &= q_h k_h, \\ F &= q'_h p'_h. \end{aligned}$$

Consideriamo una trasformazione vicina a quella identica, vale a dire

$$F = q'_h p'_h + \epsilon f(q', p', t')$$

con ϵ parametro piccolo (cioè tale che $\epsilon^2 \ll \epsilon$).

Si ha, allora

$$p_h = \frac{\partial F}{\partial q'_h} = p'_h + \epsilon \frac{\partial f}{\partial q'_h}, \quad e \quad q''_h = \frac{\partial F}{\partial p'_h} = q_h + \epsilon \frac{\partial f}{\partial p'_h}.$$

Dalla prima delle due espressioni precedenti segue

$$p''_h = p'_h = p_h - \epsilon \frac{\partial f(q', p', t')}{\partial q'_h}.$$

Quindi la differenza tra le nuove coordinate (q'', p'', t'') e le vecchie (q, p, t) è di termini di ordine ϵ , per cui

$$\frac{\partial f(q', p', t')}{\partial q'_h} = \frac{\partial f(q, p, t)}{\partial q_h} + O(\epsilon), \quad \frac{\partial f(q', p', t')}{\partial p'_h} = \frac{\partial f(q, p, t)}{\partial p_h} + O(\epsilon).$$

In definitiva, a meno di termini dell'ordine di ϵ^2 , si ha

$$p''_h = p_h - \epsilon \frac{\partial f}{\partial q_h}(q, p, t), \quad q''_h = q_h + \epsilon \frac{\partial f}{\partial p_h}(q, p, t),$$

di modo che una funzione arbitraria $f(q, p, t)$ genera una trasformazione infinitesima.

Definizione 8 Una trasformazione dalle coordinate (q_h, p_h, t) alle coordinate (q''_h, p''_h, t'') , con $t'' = t$, si dice canonica (univalente) se $\{f, g\} = \{f, g\}''$, $\forall f, g$ sufficientemente regolari.

Mostriamo adesso che le trasformazioni canoniche mantengono la forma delle equazioni di Hamilton. Lo faremo solo per le trasformazioni trasversali, ma il risultato è generale.

Definiamo la seguente funzione sullo spazio delle fasi esteso

$$G(q', p', t') = \frac{\partial F(q', p', t')}{\partial t'}.$$

Teorema 9 Per ogni funzione f definita sullo spazio delle fasi esteso, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t''} + \{f, G\}.$$

Dimostrazione Seguendo un procedimento del tutto simile a quello adottato per ottenere le (4.14)–(4.17), si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t'} &= \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial^2 F}{\partial q'_h \partial t'} + \frac{\partial f}{\partial t}, & (f(q, p(q', p', t'), t)) \\ \frac{\partial f}{\partial t'} &= \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial q''_h}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial t''} = \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial^2 F}{\partial p'_h \partial t'} + \frac{\partial f}{\partial t''}, & (f(q''(q', p', t'), p'', t''),\end{aligned}$$

da cui, dall'uguaglianza dei secondi membri ed invertendo l'ordine di derivazione nelle derivate seconde della F ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t''} + \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial G}{\partial p'_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q'_h} = \frac{\partial f}{\partial t''} + \frac{\partial f}{\partial q''_h} \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial p'_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q'_h} \\ &\stackrel{\frac{\partial p_k}{\partial p'_h} = \frac{\partial q''_h}{\partial q'_k}}{=} \frac{\partial f}{\partial t''} + \frac{\partial q''_k}{\partial q'_h} \left[\frac{\partial f}{\partial q'_k} \frac{\partial G}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial G}{\partial q'_k} \right] \stackrel{\text{per la (4.22)}}{=} \frac{\partial f}{\partial t''} + \{f, G\}.\end{aligned}$$

Adesso, consideriamo la derivata di f lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton, si ha

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial t''} + \{f, G\} + \{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial t''} + \{f, G + \mathcal{H}\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t''} + \{f, G + \mathcal{H}\}''.\end{aligned}$$

Prendendo $f = q''_h, p''_h$, $h = 1, \dots, n$, si ottiene

$$\dot{q}''_h = \{q''_h, G + \mathcal{H}\}'', \quad \dot{p}''_h = \{p''_h, G + \mathcal{H}\}''.$$

Pertanto, risulta dimostrato il seguente

Teorema 11 *Le equazioni del moto nel nuovo sistema di coordinate hanno anch'esse la forma di Hamilton con nuova hamiltoniana $\mathcal{H}'' = \mathcal{H} + G$.*

4.6 Equazione di Hamilton–Jacobi

Si può cercare una trasformazione canonica per la quale la nuova hamiltoniana sia identicamente nulla

$$\mathcal{H}'' \equiv 0.$$

Se si trovasse, le nuove variabili sarebbero quindi delle costanti del moto

$$q''_h = \text{cost}, \quad p''_h = \text{cost}, \quad h = 1, \dots, n.$$

Si supponga che la trasformazione sia costruita seguendo i passi illustrati in precedenza a partire dalla famiglia di funzioni

$$S(q, k, t).$$

Si fissi, per il momento, il valore dei parametri k_1, k_2, \dots, k_n e sia Σ l'insieme dei punti dello spazio delle fasi esteso tali che

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n,$$

che è quindi una superficie $(n + 1)$ -dimensionale, rappresentata in Fig. 4.6, il cui generico punto ha coordinate

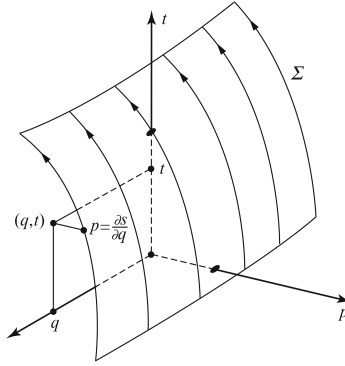


Figura 4.1: Superficie Σ .

$$q_h, p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h}, t,$$

rispetto al primo sistema di coordinate. Si noti che al variare di k_1, \dots, k_n le corrispondenti superfici riempiono tutto lo spazio delle fasi esteso. Sulla superficie Σ l'hamiltoniana ha l'espressione

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t),$$

che si ottiene mediante la sostituzione $p_h \rightarrow \frac{\partial S}{\partial q_h}$, $h = 1, \dots, n$, nell'espressione di \mathcal{H} in funzione delle coordinate (q, p, t) . Inoltre, poiché su Σ

$$F(q', p', t') = S(q, k, t),$$

si ha anche

$$G = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Pertanto \mathcal{H}'' si annulla su Σ se la funzione S soddisfa l'equazione differenziale alla derivate parziali

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (4.27)$$

che è detta equazione di *Hamilton–Jacobi*. La funzione incognita è la S e le variabili indipendenti sono q_1, \dots, q_n e t . Se si trova una famiglia $S(q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_n, t)$ (con $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial k_j}\right)$ non singolare) di soluzioni di questa equazione, si determina la funzione generatrice della trasformazione canonica per la quale $\mathcal{H}'' = 0$.

Il problema è che in generale questa equazione è molto più difficile da risolvere delle equazioni di Hamilton. Comunque l'equazione di Hamilton–Jacobi è molto importante perché può essere usata come anello di congiunzione tra la meccanica classica e quella quantistica. Essa fornisce anche importanti informazioni qualitative sui sistemi meccanici che non si possono trattare analiticamente.

Nei casi in cui si riesce a trovare una soluzione $S(q_1, \dots, q_n, k_1, \dots, k_n, t)$ si possono ottenere famiglie di soluzioni delle equazioni di Hamilton di partenza. Se Σ è la superficie che corrisponde ad una particolare n -pla di valori k_1, \dots, k_n , allora $p_h'' = p_h' = k_h = \text{cost}$ su Σ . Le soluzioni (orbite) nel nuovo sistema di coordinate sono date dalle

$$q_h'' = \text{cost}, \quad p_h'' = \text{cost}, \quad h = 1, \dots, n,$$

quindi un'orbita che passa per un punto di Σ giace su Σ . Inoltre, le coordinate q_h'' di quest'orbita sono date da

$$q_h'' = \frac{\partial F(q', p', t)}{\partial p_h'} = \frac{\partial S(q, k, t)}{\partial k_h}, \quad h = 1, \dots, n$$

e quindi, risolvendo il sistema

$$\frac{\partial S(q, k, t)}{\partial k_h} = c_h, \quad h = 1, \dots, n, \quad \text{con } c_h, h = 1, \dots, n \text{ costanti,}$$

rispetto alle q si ottiene la famiglia di soluzioni cercate.

Esempio Oscillatore armonico.

Si consideri un punto materiale di massa unitaria attaccato ad una molla di costante elastica unitaria. Il punto materiale oscilla lungo una direzione che chiamiamo x . La sua energia cinetica e potenziale sono

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^2, \quad U = \frac{1}{2}q^2, \quad (\text{con } q = x),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2, \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \\ \mathcal{H} &= p\dot{q} - \mathcal{L} = p^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2. \end{aligned}$$

Scriviamo l'equazione di Hamilton–Jacobi

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$S(q, t) = W_1(q) + W_2(t),$$

sostituendo nell'equazione di Hamilton–Jacobi si ottiene

$$\frac{1}{2}\left[q^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial q}\right)^2\right] = -\frac{\partial W_2}{\partial t}.$$

La funzione al primo membro dipende solo da q , quella al secondo membro solo da t , allora deve aversi

$$\begin{cases} -\frac{\partial W_2}{\partial t} = k \Rightarrow W_2 = -kt + c_1, \text{ con } k \text{ e } c_1 \text{ costanti,} \\ q^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial q}\right)^2 = 2k. \end{cases}$$

In definitiva, si ha

$$S = \int \sqrt{2k - q^2} dq - kt.$$

Adesso, possiamo costruire la trasformazione seguendo i passi elencati in precedenza. Le coordinate intermedie sono date da

$$q' = q, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2k - q^2} \Rightarrow 2k - q^2 = p^2, \quad k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad p' = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Dopo di che si definisce la funzione generatrice

$$F(q', p', t') = S(q, k, t) \Big|_{\substack{q = q' \\ k = p' \\ t = t'}} = \int \sqrt{2p' - (q')^2} dq' - p't'$$

e quindi

$$\begin{aligned} q'' &= \frac{\partial F}{\partial p'} = \int \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2p' - (q')^2}} dq' - t = -t + \arcsin \left(\frac{q'}{\sqrt{2p'}} \right) \\ p'' &= p' = \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \end{aligned}$$

da cui si vede che p'' coincide con l'energia.

Nel caso in questione, lo spazio delle fasi esteso è (q, p, t) , vale a dire \mathbb{R}^3 ed è facile risolvere le equazioni del moto, infatti

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q} = \dot{p} = -q \\ \dot{p} = -q \end{cases} \begin{cases} q = \sqrt{2E} \sin(t + \alpha) \\ p = \sqrt{2E} \cos(t + \alpha) \\ t = t \end{cases}$$

Le ultime sono le equazioni parametriche di una famiglia a due parametri, E, α , di eliche, di cui il primo è stato chiamato E perché $\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2 = \mathcal{H} = E$. Si introducano le seguenti coordinate polari

$$p = r \cos \theta, \quad q = r \sin \theta,$$

allora le orbite si esprimono più semplicemente come

$$r = \sqrt{2E}, \quad \theta = t + \alpha.$$

In termini di queste coordinate, le nuove variabili si scrivono

$$p'' = \frac{1}{2}r^2, \quad q'' = -t + \arcsin \left(\frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}} \right) = -t + t + \alpha = \alpha,$$

e sono costanti, come previsto dalla teoria.

Appendice A

Curve regolari

È intuitivo che un punto in moto in uno spazio \mathcal{E}_3 descrive una curva. Da un punto di vista matematico, una curva è un insieme di punti $\gamma \subset \mathcal{E}_3$, detto sostegno della curva, dotato di una parametrizzazione continua:

$$P = P(t), t \in I = [a, b] \subseteq \mathbb{R},$$

con I intervallo di \mathbb{R} .

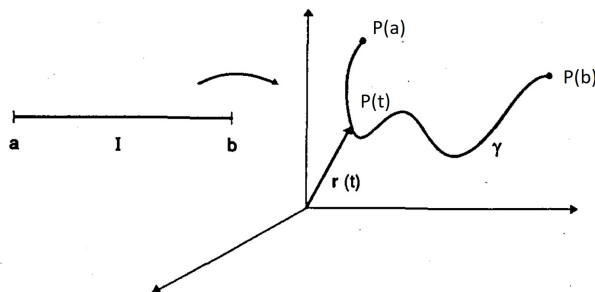


Figura A.1: Curva in \mathbb{R}^3 .

Sottolineamo, quindi, che una curva non è solo un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 , ma è caratterizzata anche da una parametrizzazione. La variabile t si chiama parametro della curva. La parametrizzazione di una curva non è unica, basta, infatti, considerare una funzione

$$\varphi : \tilde{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow I,$$

continua, invertibile e suriettiva, per ottenere una nuova parametrizzazione:

$$P(\varphi(\tau)), \quad \tau \in \tilde{I}.$$

In generale una curva di \mathcal{E}_3 è sghemba, nel senso che non esiste un piano che la contiene. Se invece il piano esiste, allora la curva, naturalmente, si dice piana.

Fissato un riferimento $\{O, (\mathbf{e}_i)\} = \{O, x_1, x_2, x_3\}$, ad ogni $P \in \gamma$ si possono associare le tre componenti del vettore $P - O$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t), \\ x_3 = x_3(t), \end{cases}$$

queste equazioni si chiamano equazioni parametriche della curva data.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \xi, \\ x_2 = R \sin \xi, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad R \in \mathbb{R}^+, \quad \xi \in [0, 2\pi),$$

sono le equazioni parametriche della circonferenza di centro O e raggio R , che giace nel piano Ox_1x_2 .

Il vettore $P(t+\Delta t) - P(t)$ si dice vettore secante alla curva nei punti $P(t+\Delta t)$ e $P(t)$. Se esiste il $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$ e questo limite ha modulo finito e diverso da zero, esso si chiama vettore tangente, $\mathbf{v}(t)$, alla curva in $P(t)$.

Proprietà 27 *Il vettore tangente $\mathbf{v}(t)$, se esiste, ha componenti $v_i = \dot{x}_i$.*

Definizione 10 *Diremo che una curva è regolare se*

- *l'applicazione $P(t)$ è biunivoca da I a γ (talvolta questa condizione non è richiesta e le curve che la soddisfano su $\overset{\circ}{I}$ (insieme dei punti interni di I) sono dette semplici),*
- *$P(t)$ ha derivata prima continua e $\dot{P}(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$.*

Definizione 11 *Una curva si dice regolare a tratti (generalmente regolare) se I si può suddividere in un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali la curva sia regolare.*

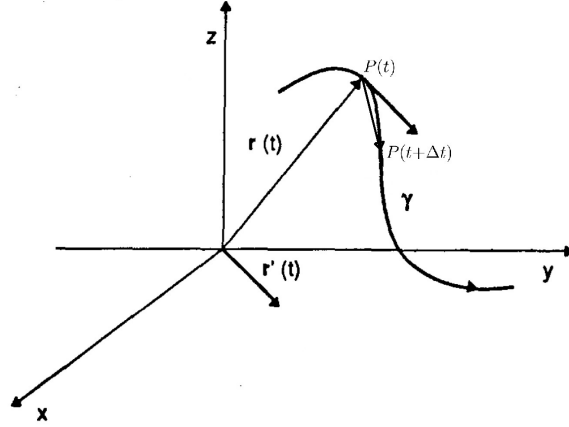


Figura A.2: Vettore tangente ad una curva.

D'ora innanzi considereremo curve che siano almeno generalmente regolari. Sul sostegno γ si può fissare un orientamento individuando il verso in cui si muove il punto P al crescere del parametro t .

Fissato un punto O sulla curva, corrispondente ad un certo valore t_0 del parametro, vediamo di assegnare una lunghezza agli archi $\widehat{OP}(t)$, $t > t_0$. Possiamo pensare di suddividere $[t_0, t]$ in tanti sottointervallini di estremi $t_0 < t_1 < \dots < t_n \equiv t$, con $t_i - t_{i-1} = \Delta t$, $i = 1, \dots, n$ e considerare la linea spezzata individuata dai punti $O, P(t_1), \dots, P(t_n)$. La lunghezza di questa linea è

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{[x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})]^2 + [x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})]^2 + [x_3(t_i) - x_3(t_{i-1})]^2}{\Delta t^2}} \Delta t.$$

L'estremo superiore delle lunghezze che si ottengono al variare delle partizioni finite dell'intervallo $[t_0, t]$, se esiste, è per definizione la lunghezza dell'arco di curva considerato. Si può dimostrare che la lunghezza degli archi di una curva generalmente regolare esiste ed è uguale al seguente integrale

$$\int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{A.1})$$

che è il limite, per l'ampiezza della partizione che tende a zero, della somma scritta sopra (vedi Pagani-Salsa vol. II). È facile dimostrare che a meno del segno il suddetto integrale non dipende dalla parametrizzazione scelta per

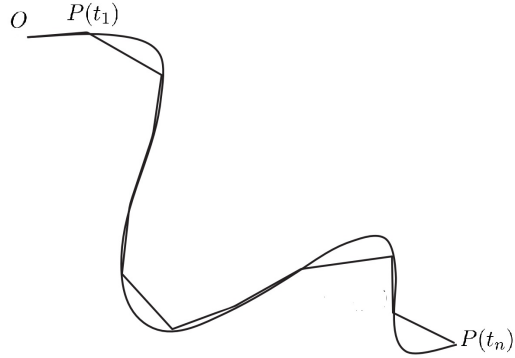


Figura A.3: Approssimazione di un arco di curva con una poligonale.

la curva. Se $t < t_0$, la lunghezza sarà data dall'opposto dell'integrale (A.1). In generale la quantità

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} dt, \quad (\text{A.2})$$

che è positiva, negativa o nulla a seconda che $t > t_0$, $t < t_0$ o $t = t_0$, si chiama ascissa curvilinea di P e può essere scelta come parametro della curva. Infatti, avendosi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} > 0,$$

la funzione (A.2) è invertibile.

Se si sceglie s come parametro, il vettore tangente $\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds}$ avrà modulo unitario. La verifica di questa affermazione è lasciata per esercizio.

Definizione 12 Una curva regolare si dice *biregolare* se $P(t)$ è due volte derivabile con derivata seconda continua ed inoltre

$$P'(t) \wedge \ddot{P}(t) \neq \mathbf{0},$$

vale a dire che $P'(t)$ e $\ddot{P}(t)$ hanno entrambi modulo strettamente positivo e non sono paralleli tra di loro.

Definizione 13 Il piano α passante per $P(t)$ e parallelo tanto a $\dot{P}(t)$ quanto a $\ddot{P}(t)$ si chiama piano osculatore alla curva biregolare di sostegno γ in $P(t)$. Esso non dipende dalla scelta che si fa per il parametro.

Scriviamo l'equazione di questo piano: si consideri il generico punto $Q \in \alpha$, $Q \neq P$, $(P(t), Q - P(t))$ è un vettore applicato che giace su α , $\dot{P}(t)$ e $\ddot{P}(t)$ sono due vettori paralleli ad α , pertanto il vettore $\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)$ è ortogonale ad α . Ne viene che $Q - P(t)$ è ortogonale a $\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)$ se e solo se $Q \in \alpha$ e quindi

$$\left[Q - P(t) \right] \cdot \left[\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t) \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

è l'equazione cercata.

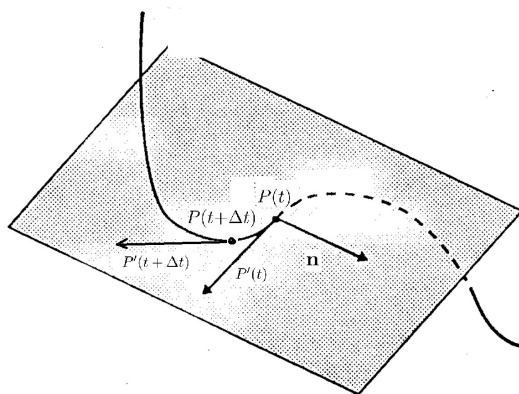


Figura A.4: Piano osculatore.

Si può dimostrare che vale la

Proprietà 28 Il piano osculatore a γ in $P(t)$ è il piano limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del piano passante per $P(t)$ e parallelo tanto a $\dot{P}(t)$ quanto a $\dot{P}(t + \Delta t)$ ¹

¹Si noti che l'equazione del piano per $P(t)$, parallelo sia a $\dot{P}(t)$ che a $\dot{P}(t + \Delta t)$ è

$$\left[Q - P(t) \right] \cdot \left[\dot{P}(t) \wedge \dot{P}(t + \Delta t) \right] = 0$$

e che

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) \wedge \dot{P}(t + \Delta t) &= \dot{P}(t) \wedge \left[\dot{P}(t + \Delta t) - \dot{P}(t) \right] = \dot{P}(t) \wedge \left[\ddot{x}_1(t + \xi_1 \Delta t) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \ddot{x}_2(t + \xi_2 \Delta t) \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3(t + \xi_3 \Delta t) \mathbf{e}_3 \right] \Delta t, \end{aligned}$$

Adesso, usiamo l'ascissa curvilinea s come parametro. Se $\mathbf{t}(s)$ è il vettore tangente a γ nel punto $P(s)$, essendo $\mathbf{t}(s)$ di modulo unitario, avremo

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s)) = 2 \frac{d}{ds} \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0,$$

che implica che il vettore $\frac{d}{ds} \mathbf{t}(s) = \frac{d^2}{ds^2} P(s)$ (che si mostra essere parallelo ad α) è ortogonale a \mathbf{t} . La retta perpendicolare a \mathbf{t} ed appartenente ad α si dice normale principale alla curva nel punto P , vedi Figura A.4.

Definizione 14 L'angolo $\Delta\varphi$ tra $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{t}(s + \Delta s)$ si chiama angolo di contingenza relativo all'arco di curva che va da $P(s)$ a $P(s + \Delta s)$, vedi Figura A.5. La curvatura k di γ in $P(s)$ si definisce nel seguente modo

$$k := \frac{1}{r} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}.$$

Il reciproco r della curvatura si chiama raggio di curvatura di γ in P .

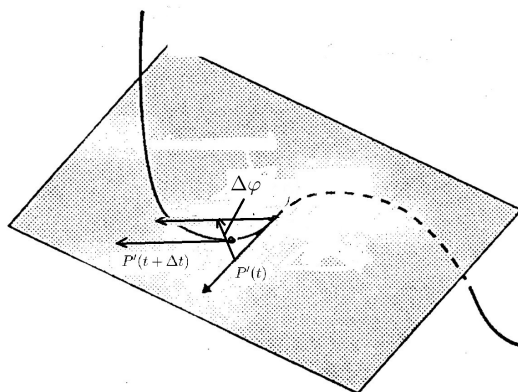


Figura A.5: Angolo di contingenza.

dove si è applicato il teorema della media di Lagrange ad ogni componente del vettore $\dot{P}(t + \Delta t) - \dot{P}(t)$ ($0 < \xi_1, \xi_2, \xi_3 < 1$).

Adesso, sostituendo quest'ultima espressione nella equazione del suddetto piano, si trova

$$\left[Q - P(t) \right] \cdot \left\{ \dot{P}(t) \wedge \left[\ddot{x}_1(t + \xi_1 \Delta t) \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2(t + \xi_2 \Delta t) \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3(t + \xi_3 \Delta t) \mathbf{e}_3 \right] \right\} = 0,$$

che passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ restituisce l'equazione (A.3).

Si noti che nel caso in cui la curva sia una circonferenza, il raggio di curvatura coincide proprio con il raggio della circonferenza (l'angolo di contingenza, in questo caso è uguale all'angolo al centro sotteso dall'arco di circonferenza di lunghezza $|\Delta s|$). Si noti anche che se la curva è una linea retta, essendo $\Delta\varphi \equiv 0$, la curvatura è identicamente nulla.

Proprietà 29 *La curvatura coincide con il modulo del vettore $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$.*

Dimostrazione*

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} \frac{\sin \Delta\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{|\Delta s|}$$

ed essendo $\sin \Delta\varphi = |\mathbf{t}(s + \Delta s) \wedge \mathbf{t}(s)|$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \wedge \mathbf{t}(s) \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \wedge \mathbf{t}(s) \right| \\ &= \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{t}(s) \right| = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|. \end{aligned}$$

Proprietà 30 *Detto $\mathbf{n}(s)$ il versore della normale principale orientato verso la concavità della curva, si ha*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{r} \mathbf{n}. \quad (\text{A.4})$$

Dimostrazione*. Rimane da mostrare che $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ed $\mathbf{n}(s)$ hanno lo stesso verso. Poiché, per Δs sufficientemente piccolo, l'angolo tra $P(s + \Delta s) - P(s)$ ed $\mathbf{n}(s)$ non supera $\frac{\pi}{2}$, si ha $0 \leq [P(s + \Delta s) - P(s)] \cdot \mathbf{n}(s)$, inoltre dal teorema della media generalizzato ne viene

$$\begin{aligned} 0 \leq [P(s + \Delta s) - P(s)] \cdot \mathbf{n}(s) &= \left[\frac{dP}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \Delta s^2 + O(\Delta s^3) \right] \cdot \mathbf{n}(s) \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \Delta s^2 + O(\Delta s^3) \right] \cdot \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

da cui dividendo l'ultimo termine per Δs^2 e passando al limite per Δs che tende a zero, segue quanto si voleva provare.

Definizione 15 *Dicesi centro di curvatura di γ in P il punto $C := P + r\mathbf{n}$, mentre la circonferenza giacente su α che ha centro C e raggio r si dice circonferenza osculatrice a γ in P .*

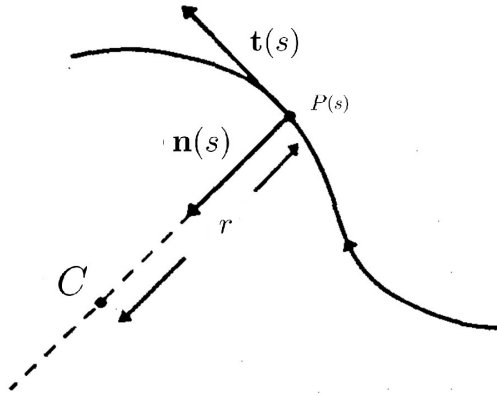


Figura A.6: Centro di curvatura.

Definizione 16 Si chiama binormale a γ in P la normale ad α passante per P .

Definizione 17 Il riferimento ortonormale levogiro $\{P, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ con $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ si chiama triedro principale o di Frénet.

Poiché $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$, derivando rispetto all'ascissa curvilinea si ottiene

$$0 = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{r} \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t},$$

da cui si deduce che $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è ortogonale a \mathbf{t} . Inoltre $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è ortogonale a \mathbf{b} , pertanto $\exists \tau$ tale che

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n} \quad (\text{terza formula di Frénet}).$$

La funzione $\tau(s)$ prende il nome di torsione (si noti che, a differenza della curvatura, può essere anche negativa) e misura la velocità con cui varia il piano osculatore lungo la curva, quindi il grado di scostamento di una curva rispetto alla forma piana. Infine da $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$, derivando si ha

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \frac{1}{r} \mathbf{n} = -\tau \mathbf{b} - \frac{1}{r} \mathbf{t},$$

che è la seconda formula di Frenét.

Appendice B

Funzioni isotrope

Una funzione s , a valori scalari, che dipende dal vettore \mathbf{v} è detta isotropa se

$$s(\mathbf{v}) = s(\mathbf{Qv}), \quad \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale.}$$

In questo caso s deve essere una funzione dell'unico scalare indipendente invariante per trasformazioni ortogonali che si può costruire usando il vettore \mathbf{v} , che è $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ e quindi

$$s(\mathbf{v}) = s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

Una funzione \mathbf{b} , a valori vettoriali, che dipende dal vettore \mathbf{v} è detta isotropa se

$$\mathbf{Qb}(\mathbf{v}) = \mathbf{b}(\mathbf{Qv}), \quad \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale.}$$

Sia \mathbf{c} un vettore arbitrario, definiamo la funzione a valori scalari

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{v}).$$

Essa è una funzione isotropa di \mathbf{v} e \mathbf{c} , infatti

$$\begin{aligned} F(\mathbf{Qv}, \mathbf{Qc}) &= \mathbf{Qc} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{Qv}) = \mathbf{Qc} \cdot \mathbf{Qb}(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{Q}^T \mathbf{Qb}(\mathbf{v})) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

I soli invarianti (rispetto alle trasformazioni ortogonali) scalari indipendenti che si possono costruire a partire da \mathbf{v} e \mathbf{c} sono: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}$. Inoltre F è lineare in \mathbf{c} , allora deve aversi

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{c}) = a_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{c} \cdot \mathbf{v},$$

e per l'arbitrarietà di \mathbf{c} :

$$\mathbf{b}(\mathbf{v}) = a_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Appendice C

Approfondimenti sui sistemi di vettori e di geometria delle masse

C.1 Equipollenza di due sistemi di vettori

Definizione 31 Due sistemi di vettori applicati $\{P_A, \mathbf{v}_A\}_{A=1}^n$ e $\{P'_B, \mathbf{w}_B\}_{B=1}^m$ si dicono equivalenti se

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \text{ e } \mathbf{M}_{\tilde{O}} = \mathbf{M}'_{\tilde{O}}, \forall \tilde{O} \in \mathcal{E}_3,$$

con $\mathbf{R} := \sum_{A=1}^n \mathbf{v}_A$ e $\mathbf{M}_{\tilde{O}} := \sum_{A=1}^n (P_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{v}_A$, risultante e momento risultante, rispetto al polo \tilde{O} , del primo sistema di vettori. Analogo è il significato di \mathbf{R}' e $\mathbf{M}'_{\tilde{O}}$.

Vale il seguente

Teorema 32 Condizione necessaria e sufficiente affinché due sistemi di vettori applicati siano equivalenti è che abbiano lo stesso risultante ed esista un punto \bar{O} tale che $\mathbf{M}_{\bar{O}} = \mathbf{M}'_{\bar{O}}$.

(Parte necessaria) È evidente

(Parte sufficiente) I due sistemi di vettori abbiano lo stesso risultante ed

esista \bar{O} tale che $\mathbf{M}_{\bar{O}} = \mathbf{M}'_{\bar{O}}$, allora considerato un $\forall \tilde{O}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\tilde{O}} &= \sum_{A=1}^n (P_A - \tilde{O}) \wedge \mathbf{v}_A = \sum_{A=1}^n [(P_A - \bar{O}) + (\bar{O} - \tilde{O})] \wedge \mathbf{v}_A \\ &= \mathbf{M}_{\bar{O}} + (\bar{O} - \tilde{O}) \wedge \mathbf{R} = \sum_{B=1}^m (P'_B - \bar{O}) \wedge \mathbf{w}_B + (\bar{O} - \tilde{O}) \wedge \sum_{B=1}^m \mathbf{w}_B \\ &= \mathbf{M}'_{\bar{O}}.\end{aligned}$$

Teorema 33 *Il momento risultante di un sistema di vettori $\{P_A, \mathbf{v}_A\}_{A=1}^n$, che ha risultante nullo, è indipendente dal polo che si sceglie.*

Dimostrazione Siano \tilde{O} ed \tilde{O}' due punti qualsiasi, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\tilde{O}'} &= \sum_{A=1}^n (P_A - \tilde{O}') \wedge \mathbf{v}_A = \sum_{A=1}^n [(P_A - \tilde{O}) + (\tilde{O} - \tilde{O}')] \wedge \mathbf{v}_A \\ &= \mathbf{M}_{\tilde{O}} + (\tilde{O} - \tilde{O}') \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_{\tilde{O}}.\end{aligned}$$

Definizione 34 *Si dice coppia ogni sistema costituito da due vettori applicati opposti: $\left\{ (P_1, \mathbf{v}), (P_2, -\mathbf{v}) \right\}$.*

π , b e $|\mathbf{v}|$, che sono rispettivamente il piano che contiene i vettori, la distanza tra le loro rette d'azione ed il loro modulo, si dicono piano, braccio ed intensità della coppia.

Proprietà 35 *Tutte e sole le coppie con uguali braccio per intensità, e piani paralleli hanno momenti che sono uguali oppure opposti.*

Proprietà 36 *Un sistema di vettori applicati $\{P_A, \mathbf{v}_A\}_{A=1}^n$ è equivalente al proprio risultante \mathbf{R} , applicato in un punto \bar{O} prefissato ad arbitrio, e ad una coppia che ha come momento $\mathbf{M}_{\bar{O}}$.*

Dimostrazione Infatti il risultante del sistema costituito da (\bar{O}, \mathbf{R}) e dalla coppia è \mathbf{R} , ed il momento risultante dei due sistemi, rispetto ad \bar{O} , è lo stesso, vale a dire $\mathbf{M}_{\bar{O}}$.

C.2 Assi d'inerzia

La geometria delle masse si occupa di tutto ciò che ha a che fare con baricentri e tensori d'inerzia.

Corollario 1 (del teorema di Huygens) Se (G, \mathbf{e}_i) è una terna centrale d'inerzia allora $(\tilde{O}, \mathbf{e}_i)$ è principale d'inerzia per tutti i punti \tilde{O} appartenenti ad uno degli assi centrali.

Dimostrazione Dato un qualsiasi $\tilde{O} \in Gx_3$ si ha

$$(\mathcal{I}_{\tilde{O}})_{ij} = (\mathcal{I}_G)_{ij} + m[(x_{G_k} - x_{\tilde{O}_k})^2 \delta_{ij} - (x_{G_i} - x_{\tilde{O}_i})(x_{G_j} - x_{\tilde{O}_j})]$$

e le componenti con $i \neq j$ del secondo termine dell'espressione precedente sono nulle poiché $x_{G_1} = x_{\tilde{O}_1} = x_{G_2} = x_{\tilde{O}_2} = 0$. Analogamente si procede negli altri due casi.

Per determinare gli assi principali d'inerzia, in linea di principio, si prende una terna solidale, si calcola, mediante la definizione, la matrice rappresentativa del tensore d'inerzia rispetto alla terna scelta, e si risolve il problema agli autovalori. Qualora però il corpo presenti delle simmetrie materiali, il problema risulta semplificato.

Ad esempio, si ha

1. a sia un asse di simmetria per un sistema S di punti materiali rigidamente vincolati ¹, allora a è un asse centrale d'inerzia;
2. π sia un piano di simmetria per un sistema S di punti materiali rigidamente vincolati, allora esso è un piano principale d'inerzia per ogni suo punto (v. Rionero, Romano o Siboni).

Risultati analoghi valgono anche per i corpi estesi.

¹si sta considerando un sistema di punti materiali solo per semplicità

Appendice D

Le leggi di Keplero

In questa appendice dimostreremo la validità delle tre leggi di Keplero. Come abbiamo detto un riferimento con origine O nel centro del Sole (S) ed assi di direzione immutabile rispetto alle stelle fisse può considerarsi con buona approssimazione inerziale. In questo sistema di riferimento, l'equazione del moto di un pianeta P del sistema solare¹, trascurando le forze che gli altri pianeti esercitano su di esso, si scrive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{PS}(\mathbf{r}) = f(\rho)\frac{\mathbf{r}}{\rho},$$

dove m è la massa del pianeta, \mathbf{r} il vettore posizione del pianeta, $\rho = |\mathbf{r}|$ ed $f(\rho) = -k\frac{1}{\rho^2}$, con $k = GmM$, M essendo la massa del Sole e G la costante di attrazione universale.

Un primo risultato significativo, valido per tutte le forze centrali, è dato dalla seguente

Proprietà 37 *La traiettoria di un punto materiale libero soggetto ad una forza centrale è contenuta nel piano, passante per il centro, individuato dalla posizione e dalla velocità iniziali (piano di Laplace). Inoltre, in questo moto piano è costante la velocità areale di P intorno ad O (2^a legge di Keplero²).*

Dimostrazione Il momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{r})$, rispetto al centro di forza O di una forza centrale, essendo \mathbf{r} ed \mathbf{f} paralleli, è nullo. Dalla seconda forma della seconda equazione cardinale segue che il momento angolare si conserva,

¹Il Sole ed i pianeti sono schematizzati mediante punti materiali

²Seconda legge di Keplero, o legge delle aree uguali: *Durante il moto di un punto materiale in un campo centrale, il raggio vettore congiungente il centro del campo con la posizione del punto spazza aree uguali in tempi uguali.*

ovvero

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} \equiv \mathbf{r}_0 \wedge m\mathbf{v}_0. \quad (\text{D.1})$$

Questo implica che i vettori \mathbf{r} e \mathbf{v} sono contenuti nel piano π passante per O ed ortogonale al vettore costante \mathbf{L}_O , che è individuato dai dati iniziali \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 (se questi sono paralleli il moto avviene lungo una retta).

Prendiamo adesso il piano Oxy coincidente con il piano del moto. Sia $\mathbf{r} = (x, y, 0)^T$ e $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T$, l'unica componente non nulla di \mathbf{L}_O è la componente z , che è data da

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \text{cost.}$$

Da cui si ottiene la costanza della velocità areale.

Se nel piano π si adottano le coordinate polari (ρ, φ) di centro O ed asse polare Ox , allora l'equazione del moto diventa

$$m \left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \right] = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \quad (\text{D.2})$$

che è equivalente alle seguenti equazioni scalari

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = f(\rho), \quad (\text{D.3})$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = \text{cost} =: c, \quad (\text{D.4})$$

la seconda delle quali conferma, in coordinate polari, la costanza della velocità areale, pertanto $c \in \mathbb{R}$ viene detta costante delle aree. La seconda equazione ci dice anche che $\dot{\varphi}$ è costante in segno, quindi la funzione $\varphi = \varphi(t)$ risulta invertibile e φ può essere presa come variabile indipendente al posto del tempo t .

Per determinare l'equazione della traiettoria $\rho = \rho(\varphi)$ (vale a dire un'equazione differenziale nell'incognita $\rho = \rho(\varphi)$), a partire dalle equazioni del moto, troviamo una formula che esprima l'accelerazione radiale del punto materiale in termini della funzione $\rho = \rho(\varphi)$ e delle sue derivate. Si ha

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = -c \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (\text{D.5})$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{\rho^2} \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi} = -\frac{c^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (\text{D.6})$$

Sostituendo questo risultato nella (D.3), si ottiene

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2}{mc^2} f(\rho) = \frac{k}{mc^2} =: \frac{1}{p}. \quad (\text{D.7})$$

La precedente è l'equazione del moto di un oscillatore armonico forzato, con forzante costante uguale ad $\frac{1}{p}$, il cui integrale generale è

$$\frac{1}{\rho} = A \cos(\varphi - \bar{\varphi}) + \frac{1}{p}, \quad (A > 0).$$

Pertanto l'equazione della traiettoria è

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \bar{\varphi})}, \quad \text{con } e := Ap = \frac{Amc^2}{k}, \quad (\text{D.8})$$

che a seconda che e sia minore, uguale o maggiore di 1 è l'equazione di un'ellisse, di una parabola o di un ramo di un'iperbole, tutte con fuoco in O .

Infatti, fissata, nel piano Oxy , una retta a che non passi per O , si dice *conica* γ il luogo dei punti del piano tali che il rapporto tra la distanza ($|X - O|$) del generico punto $X \in \gamma$ dal punto O e dalla retta a ($|X - A|$ con A proiezione ortogonale di X su a) sia uguale ad una costante e :

$$\frac{|X - O|}{|X - A|} = e$$

La retta a è detta *direttrice*, il punto O è detto *fuoco* ed il numero positivo e è detto *eccentricità*. La retta a divide il piano π in due semipiani π_1 e π_2 , sia π_1 quello contenente O . Poniamo $\rho = |X - O|$ e $d = |H - O|$ (H proiezione di O su a), si ottiene

$$\frac{\rho}{|X - A|} = e.$$

Vale a dire

$$e = \frac{\rho}{d - \rho \cos(\varphi - \bar{\varphi})}, \quad \text{se } X \in \gamma \cap \pi_1,$$

$$e = \frac{\rho}{\rho \cos(\varphi - \bar{\varphi}) - d}, \quad \text{se } X \in \gamma \cap \pi_2.$$

Una conica ha quindi due rami rispettivamente di equazioni

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \bar{\varphi})},$$

$$\rho = \frac{p}{e \cos(\varphi - \bar{\varphi}) - 1},$$

con $p := de$, comunque, si vede subito che il secondo ramo ha punti reali solo nel caso dell'iperbole ($e > 1$). Vista la definizione, le coniche risultano

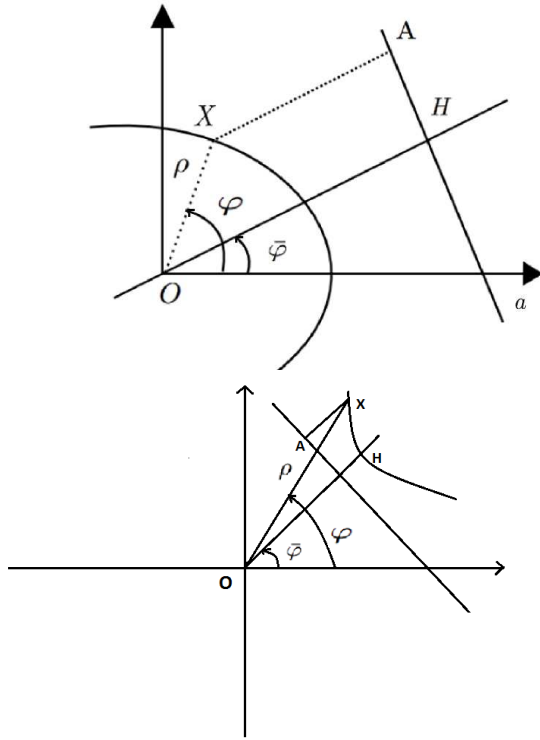


Figura D.1: Conica

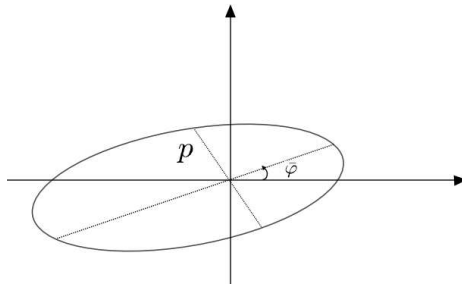


Figura D.2: Significato di p

simmetriche rispetto alla retta r perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco, che è quindi un asse di simmetria ed ha equazione $\varphi = \bar{\varphi} \vee \varphi = \bar{\varphi} + \pi$. Vediamo qual è il significato geometrico di p , considerando solo il primo ramo, che rappresenta la traiettoria trovata. Per $\varphi = \bar{\varphi} \pm \frac{\pi}{2}$, si ha $\rho = p$, che quindi rappresenta la semilunghezza del segmento individuato dalla conica sulla retta per O che è ortogonale all'asse di simmetria. Inoltre sempre relativamente al primo ramo, si ha che

- se $e < 1$, per tutti i valori di φ si hanno punti reali. In particolare ρ risulta compreso tra un valore minimo, che si ottiene per $\varphi = \bar{\varphi}$

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e} \quad (\text{D.9})$$

e corrisponde al *perielio* (punto di minima distanza dal Sole) dell'orbita, ed un valore massimo ottenuto per $\varphi = \bar{\varphi} \pm \pi$

$$\rho_{max} = \frac{p}{1-e}, \quad (\text{D.10})$$

che corrisponde all'*afelio* (punto di massima distanza dal Sole);

- se $e = 1$ si ha invece

$$\rho_{min} = \rho(\bar{\varphi}) = \frac{p}{2}, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \bar{\varphi} \pm \pi} \rho = \infty;$$

- se infine $e > 1$, la distanza del perielio è ancora data da $\frac{p}{1+e}$, mentre per $\varphi = \bar{\varphi} \pm \tilde{\alpha}$, con $\tilde{\alpha} = \arccos(-\frac{1}{e})$, si ottiene $\rho = \infty$. Le semirette aventi questi angoli sono asintoti.

Il valore dell'eccentricità della traiettoria è determinato dai valori iniziali dei vettori posizione e velocità. Infatti, ricordando che

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = -c \left(\frac{1}{\rho} \right)' \mathbf{e}_\rho + \frac{c}{\rho} \mathbf{e}_\varphi$$

e che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\varphi - \bar{\varphi})), \quad \left(\frac{1}{\rho} \right)' = -\frac{e}{p} \sin(\varphi - \bar{\varphi}),$$

per l'energia meccanica, che è una costante del moto, si ha

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_0 &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - \frac{k}{\rho} = \frac{1}{2}m \left[\frac{c^2 e^2}{p^2} \sin^2(\varphi - \bar{\varphi}) \right. \\
 &+ \left. \frac{c^2}{p^2}(1 + e \cos(\varphi - \bar{\varphi}))^2 \right] - \frac{k}{p}(1 + e \cos(\varphi - \bar{\varphi})) \\
 &= \frac{1}{2}m \left[\frac{c^2 e^2}{p^2} + \frac{c^2}{p^2} + 2e \frac{c^2}{p^2} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) \right] \\
 &- e \frac{m c^2}{p^2} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) - \frac{m c^2}{p^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m c^2}{p^2} (e^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Pertanto si può concludere che la traiettoria di P è un'ellisse, una parabola od un'iperbole a seconda che l'energia meccanica iniziale è minore, uguale o maggiore di 0.

Adesso vogliamo trovare l'equazione canonica di una conica in coordinate cartesiane. Partiamo dalle espressioni delle coordinate del punto materiale P rispetto ad un riferimento $\{Oxy\}$ con asse x coincidente con l'asse di simmetria:

$$\begin{cases} x = \frac{de}{1+e \cos \psi} \cos \psi, \\ y = \frac{de}{1+e \cos \psi} \sin \psi, \quad \psi := \varphi - \bar{\varphi}. \end{cases}$$

Quadrando le due espressioni precedenti e sommandole si ottiene

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2 e^2}{(1 + e \cos \psi)^2},$$

mentre dall'espressione per la x si ricava

$$\cos \psi = \frac{x}{p - e x}$$

che sostituita nella precedente fornisce

$$(1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2.$$

Se $e = 1$, si ha l'equazione di una parabola con asse l'asse x . Se invece $e \neq 1$, la precedente espressione, con il metodo del completamento del quadrato, si riscrive

$$\left(x + \frac{pe}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} + \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2},$$

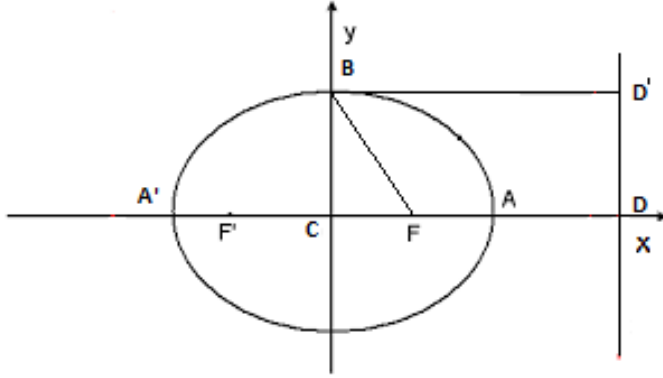


Figura D.3: Orbita di un pianeta

che mediante una traslazione lungo l'asse x si può porre nella forma canonica

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)}} = 1,$$

da cui si trova che

$$a = \frac{p}{|1-e^2|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1-e^2|}},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{se } e < 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{se } e > 1.$$

Come volevasi dimostrare, si ottiene quindi l'equazione di un'ellisse o di un'iperbole (in forma canonica) a seconda che l'eccentricità sia minore o maggiore di 1.

Il legame tra le lunghezze a e b dei semiassi di un'ellisse e le quantità p ed e si può trovare anche direttamente per via geometrica. Indichiamo con A ed A' rispettivamente il punto di minima distanza (perielio) e di quella massima distanza (afelio) dal Sole, questi si trovano per $\psi = 0$ e per $\psi = \pi$, pertanto si ha

$$|FA| = \frac{p}{1+e}, \quad |FA'| = \frac{p}{1-e}.$$

Da cui segue

$$a = |A'A|/2 = \frac{p}{1-e^2}.$$

Per trovare b , abbiamo bisogno di determinare $|FB|$ e $|FC|$. Per la prima di queste lunghezze si ha

$$|FC| = a - |FA| = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{pe}{1-e^2}.$$

Per quanto riguarda la seconda lunghezza, notiamo che essendo B un punto dell'ellisse, deve aversi

$$\frac{|FB|}{|BD'|} = e.$$

Per $|BD'|$ si ha

$$|BD'| = |FD| + |FC| = d + \frac{pe}{1-e^2} = \frac{p}{e} + \frac{pe}{1-e^2} = \frac{p}{e(1-e^2)}.$$

Allora si trova

$$|FB| = e|BD'| = \frac{p}{1-e^2},$$

e quindi, in definitiva,

$$b^2 = |FB|^2 - |FC|^2 = \frac{p^2}{1-e^2}.$$

Adesso, dimostriamo la terza legge di Keplero. Il periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al Sole, essendo la sua velocità areale costante è dato da

$$T = \frac{\mathcal{A}}{\dot{\mathcal{A}}} = \frac{2\pi ab}{c},$$

essendo \mathcal{A} l'area spazzata dal raggio vettore del pianeta in un giro attorno al Sole ed $\dot{\mathcal{A}}$ la sua velocità areale. Pertanto per il rapporto tra T^2 ed a^3 si ottiene

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2 a^3} = 4\pi^2 \frac{b^2}{ac^2} = 4\pi^2 \frac{p}{c^2} = 4\pi^2 \frac{m}{k} = \frac{4\pi^2}{MG},$$

da cui si evince che il suddetto rapporto è lo stesso per tutti i pianeti.

Concludiamo ripercorrendo il ragionamento mediante il quale Newton trovò la sua legge di attrazione gravitazionale. Per l'accelerazione radiale si ha

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)'' - \frac{c^2}{\rho^3},$$

che, notando che $\left(\frac{1}{\rho} \right)'' = -\frac{e}{p} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = \frac{a}{b^2} - \frac{1}{\rho}$, diventa

$$a_\rho = -\frac{c^2 a}{b^2} \frac{1}{\rho^2} = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \frac{1}{\rho^2}.$$

Poiché la causa di accelerazione dei pianeti deve essere il Sole in quanto l'accelerazione è diretta verso di esso, ne viene che la costante $4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ deve

dipendere solo dal Sole e dal pianeta considerato. Ma per la terza legge di Keplero il rapporto $\frac{a^3}{T^2}$ è lo stesso per tutti i pianeti, si conclude che la costante $4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} =: G_S$ dipende solo dal Sole.

Allora, per l'accelerazione \mathbf{a}_{PS} del pianeta prodotta dalla presenza del Sole si ha, in definitiva

$$\mathbf{a}_{PS} = -G_S \frac{P - S}{\rho^3}.$$

Pertanto il Sole esercita sul pianeta la forza

$$\mathbf{F}_{PS} = -G_S m \frac{P - S}{\rho^3}.$$

Poiché i satelliti attorno ai pianeti (come ad esempio la Luna attorno alla Terra) seguono leggi di moto abbastanza simili a quelle dei pianeti intorno al Sole, Newton ritenne che la precedente forza avesse carattere universale, vale a dire si esercitasse tra due punti materiali qualsiasi (attrazione o gravitazione universale) e quindi fosse anche responsabile del peso dei corpi in prossimità della Terra³. Secondo questa intuizione il pianeta deve esercitare una forza sul Sole data da

$$\mathbf{F}_{SP} = -G_P M \frac{S - P}{\rho^3}.$$

Ma, per la legge di azione e reazione, deve aversi $\mathbf{F}_{SP} = -\mathbf{F}_{PS}$ e quindi

$$G_P M = G_S m.$$

Data l'universalità dell'interazione, P ed S possono essere due punti materiali qualsiasi e la precedente implica allora che

$$\frac{G_P}{m_P} = \frac{G_S}{m_S} = G,$$

dove G è una costante universale, detta costante di attrazione universale.

³Newton immaginò che la Terra avesse una piccola Luna che le orbitasse intorno sfiorandola. Che velocità avrebbe avuto? Poiché il rapporto $\frac{T^2}{a^3}$ è lo stesso per tutti i corpi in moto attorno alla Terra, esso si può ottenere dai dati che si conoscono per il moto della vera Luna. Conoscendo a per la piccola Luna, si ricava che essa impiegherebbe circa un'ora e mezza a compiere un giro. Si trova poi la sua velocità e la sua accelerazione che, in modulo, sarebbe

$$a = \frac{v^2}{r} \approx 9.8m/s^2,$$

che è la stessa con cui i corpi cadono sulla Terra! Non può essere un caso, pensò Newton: la causa che fa cadere i corpi sulla Terra è la stessa di quella che fa ruotare i pianeti attorno al Sole. Grazie a questa conclusione Newton eliminò la separazione tra Cielo e Terra di Aristotele!

Appendice E

Moti per inerzia

Si chiamano moti per inerzia di un solido S con un punto fisso O privo di attrito tutti i possibili moti rigidi sferici che avvengono sotto l'azione di un sistema di forze attive il cui momento risultante rispetto al polo O è nullo, ovvero $\mathbf{M}_O^{(a)} = \mathbf{0}$. L'equazione di un moto per inerzia è quindi

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{0},$$

da cui si ricava

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_O^{(0)}, \quad (\text{E.1})$$

con $\mathbf{L}_O^{(0)}$ valore iniziale del momento della quantità di moto. Quindi, *durante un qualsiasi moto per inerzia di S , il vettore \mathbf{L}_O si mantiene costante (rispetto al riferimento fisso in cui si studia il moto).*

Un'altra quantità che si conserva è l'energia cinetica, infatti dal teorema delle forze vive, si ha

$$\dot{K} = \mathcal{P}^{(e)} = \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{R}^{(e)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{(e)} = 0,$$

poiché $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{0}$.

Nei moti per inerzia, le equazioni di Eulero per le componenti della velocità angolare rispetto ad una base principale, si scrivono

$$\begin{cases} A\dot{p} - (B - C)qr = 0, \\ B\dot{q} - (C - A)rp = 0, \\ C\dot{r} - (A - B)pq = 0, \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

che costituiscono quindi un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine in forma normale, nelle tre sole incognite p, q ed r , risolvibili senza

accoppiarle alle (1.20). La risoluzione di queste equazioni diventa semplice se almeno due dei tre momenti principali d'inerzia sono uguali. Si ha infatti

- Caso 1: Si supponga che due dei momenti principali di inerzia del corpo rigido S relativi al punto O , ad esempio A e B , siano uguali, cioè che S sia a struttura giroscopica rispetto ad O .¹ In tal caso si ha

$$\mathbf{L}_O = A(p\boldsymbol{\epsilon}_1 + q\boldsymbol{\epsilon}_2) + Cr\boldsymbol{\epsilon}_3,$$

con $(\boldsymbol{\epsilon}_i)_{i=1}^3$ autodirezioni principali d'inerzia, da cui

$$p\boldsymbol{\epsilon}_1 + q\boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{1}{A}\mathbf{L}_O - \frac{C}{A}r\boldsymbol{\epsilon}_3,$$

che sostituita nell'espressione della velocità angolare fornisce

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{\epsilon}_1 + q\boldsymbol{\epsilon}_2 + r\boldsymbol{\epsilon}_3 = \frac{1}{A}\mathbf{L}_O + \frac{A-C}{A}r\boldsymbol{\epsilon}_3.$$

Inoltre, la terza delle equazioni di Eulero si riduce a

$$Cr\dot{r} = 0, \quad \Rightarrow r = r^{(0)}.$$

Ne viene che nei moti per inerzia di S la velocità angolare è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{A}\mathbf{L}_O^{(0)} + \frac{A-C}{A}r^{(0)}\boldsymbol{\epsilon}_3.$$

¹Un corpo rigido S si dice a struttura giroscopica rispetto ad un punto O , ad esso appartenente o solidale, se il suo ellissoide di inerzia, relativo a tale punto, è rotondo. Ricordiamo anche che si definisce ellissoide d'inerzia di S relativo al punto O il luogo dei punti P che soddisfano l'equazione $(P-O) \cdot \mathcal{I}_O(P-O) = 1$. In un riferimento principale d'inerzia, avendosi

$$(P-O) = x'_1\boldsymbol{\epsilon}'_1 + x'_2\boldsymbol{\epsilon}'_2 + x'_3\boldsymbol{\epsilon}'_3$$

e

$$(\mathcal{I}_O)_{i'j'} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

con $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \boldsymbol{\epsilon}'_3\}$ base principale d'inerzia, l'equazione dell'ellissoide è

$$1 = (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A(x'_1)^2 + B(x'_2)^2 + C(x'_3)^2.$$

Pertanto $1/\sqrt{A}$, $1/\sqrt{B}$ e $1/\sqrt{C}$ sono le lunghezze dei semiassi dell'ellissoide.

Con ciò si è mostrato che essa è la somma di due vettori, di cui il primo è costante nello spazio del moto ed il secondo è costante nello spazio solidale. Pertanto, il moto è una precessione regolare, che ha per asse di figura l'asse di rivoluzione dell'ellissoide d'inerzia, e per asse di precessione quello passante anch'esso per O e parallelo ad $\mathbf{L}_O^{(0)}$.

- Caso 2: Si supponga che i momenti principali di inerzia relativi ad O , siano tutti uguali tra loro, vale a dire che l'ellissoide di inerzia sia una sfera. Sotto questa ipotesi, il momento angolare si riduce a

$$\mathbf{L}_O = A(p\boldsymbol{\epsilon}_1 + q\boldsymbol{\epsilon}_2 + r\boldsymbol{\epsilon}_3) = A\boldsymbol{\omega}.$$

Considerando allora la (E.1), si ricava che $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{A}\mathbf{L}_O^{(0)}$, quindi la velocità angolare è costante. *Si conclude che se l'ellissoide d'inerzia è una sfera, i moti per inerzia sono rotatori uniformi e l'asse di rotazione è determinato dalla direzione iniziale della velocità angolare.*

Rotazioni permanenti

Una particolare classe di moti per inerzia è quella delle rotazioni permanenti, vale a dire quella dei moti rotatori uniformi. Si ricordi che se la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è costante nel riferimento fisso $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ lo è anche in quello $\{O, x'_1, x'_2, x'_3\}$ principale d'inerzia solidale al corpo e viceversa. Pertanto per determinare le rotazioni permanenti occorre imporre che p, q ed r siano costanti, in tal caso le equazioni di Eulero si riducono al sistema algebrico

$$\begin{cases} (B - C)qr = 0, \\ (C - A)rp = 0, \\ (A - B)pq = 0. \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Si distinguono i seguenti casi:

- Caso 1: $A \neq B \neq C$. Nell'ipotesi che i momenti principali di inerzia siano diversi fra loro, il sistema (E.4) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} qr = 0, \\ rp = 0, \\ pq = 0, \end{cases}$$

che è soddisfatto se e solo se due delle costanti p , q ed r sono nulle (se $p = q = r = 0$ il corpo è in quiete). Dunque le soluzioni sono del tipo

$$\begin{aligned} p &= p_0, & q &= 0 & r &= 0, \\ p &= 0, & q &= q_0, & r &= 0, \\ p &= 0, & q &= 0, & r &= r_0, \end{aligned}$$

con p_0 , q_0 ed r_0 costanti arbitrarie. A queste soluzioni corrispondono rotazioni uniformi intorno ad uno dei tre assi principali di inerzia.

- **Caso 2:** $A = B \neq C$. Se due momenti principali di inerzia sono uguali, ed il terzo è diverso, si ha che la terza equazione del sistema (E.4) è sempre soddisfatta mentre, affinché siano soddisfatte le altre due, occorre e basta che sia verificato uno dei seguenti due casi

$$\begin{aligned} p &= 0, & q &= 0, & r &= r_0, \\ p &= p_0, & q &= q_0, & r &= 0, \end{aligned}$$

a cui corrispondono rotazioni uniformi intorno ad assi principali di inerzia relativi ad O . Infatti, quando $A = B \neq C$ sono assi principali di inerzia relativi ad O sia l'asse Ox'_3 che tutte le rette ad esso ortogonali passanti per O ².

- **Caso 3:** $A = B = C$. Se i momenti principali di inerzia sono tutti uguali tra loro, il sistema (E.4) è identicamente soddisfatto da ogni terna

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0,$$

con p_0 , q_0 e r_0 costanti arbitrarie. Ad ognuna di queste corrisponde una rotazione uniforme intorno ad uno degli assi principali di inerzia per O , che, essendo l'ellissoide d'inerzia una sfera, sono infatti infiniti e sono tutti gli assi per O .

Dall'analisi precedente segue immediatamente la seguente

Proprietà 38 *Tra i moti per inerzia di un solido con un punto fisso O privo di attrito, le rotazioni permanenti possono avvenire solo intorno agli assi principali di inerzia per O .*

²Infatti se \mathbf{v} è ortogonale ad Ox'_3 , allora $\mathbf{v} = v'_1\boldsymbol{\epsilon}'_1 + v'_2\boldsymbol{\epsilon}'_2$ e

$$\mathcal{I}_O(\mathbf{v}) = \mathcal{I}_O(v'_1\boldsymbol{\epsilon}'_1 + v'_2\boldsymbol{\epsilon}'_2) = Av'_1\boldsymbol{\epsilon}'_1 + Av'_2\boldsymbol{\epsilon}'_2 = A\mathbf{v}.$$

Si noti che, essendo il sistema (E.2) in forma normale, il teorema di esistenza e unicità per tali sistemi assicura che esso ammette una ed una sola soluzione che soddisfa le condizioni iniziali

$$p(t_0) = p_0, \quad q(t_0) = q_0, \quad r(t_0) = r_0 ,$$

con p_0 , q_0 ed r_0 costanti arbitrarie. Allora, se si imprime inizialmente una rotazione attorno ad un asse principale di inerzia, necessariamente il moto sarà una rotazione uniforme attorno a quell'asse.

Giroscopio

Definizione 18 *Si definisce giroscopio un solido a struttura giroscopica rispetto al baricentro, ovvero un solido il cui tensore centrale di inerzia \mathcal{I}_G ha un autovalore semplice ed uno doppio, ad esempio C semplice ed $A = B$. L'asse di rotazione dell'ellissoide centrale di inerzia è inoltre detto **asse giroscopico**.*

Proprietà 39 *Un giroscopio è a struttura giroscopica rispetto ad ogni punto del suo asse giroscopico r .*

Dimostrazione. Basta dimostrare che dato un $\forall O \in r$, un qualsiasi vettore \mathbf{u} ortogonale ad r è autovettore del tensore d'inerzia \mathcal{I}_O corrispondente allo stesso autovalore. Sfruttando il teorema di Huygens, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_O(\mathbf{u}) &= \mathcal{I}_G(\mathbf{u}) + m\{|G - O|^2 \mathbf{I} - [(G - O) \otimes (G - O)]\}(\mathbf{u}) \\ &= (\lambda + m|G - O|^2)\mathbf{u} + m(G - O)(G - O) \cdot \mathbf{u} = (\lambda + m|G - O|^2)\mathbf{u}, \end{aligned}$$

e λ , autovalore di \mathbf{u} , è lo stesso per $\forall \mathbf{u}$ ortogonale ad r , perché l'ellissoide centrale d'inerzia è rotondo attorno ad r .

Per quanto visto all'inizio di questa Appendice, vale la seguente

Proprietà 40 *Ogni moto per inerzia di un giroscopio con polo un punto dell'asse giroscopico è una precessione regolare, avente l'asse giroscopico come asse di figura.*

Giroscopio pesante

In meccanica terrestre si definisce giroscopio pesante ogni giroscopio S fissato in un punto qualsiasi O del suo asse giroscopico e soggetto soltanto al

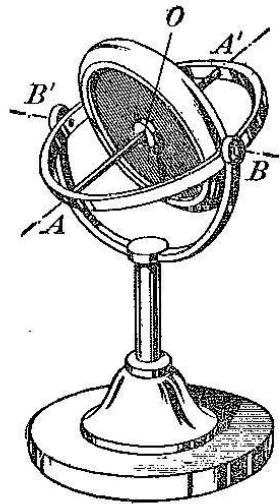


Figura E.1: Un giroscopio costituito da un disco metallico, omogeneo, massiccio, collegato ortogonalmente, nel suo centro O , ad un asse, i cui estremi sono liberamente imperniati nei punti A ed A' diametralmente opposti di un anello metallico, il quale è, a sua volta, liberamente girevole attorno al suo diametro ortogonale ad AA' , in quanto gli estremi B , B' di questo secondo diametro sono imperniati in una forcella semicircolare; la forcella è resa liberamente girevole attorno al suo asse dall'inserzione a manicotto del suo piede in una base solida che è appoggiata ad un tavolo orizzontale (vedi Amaldi, Levi-Civita).

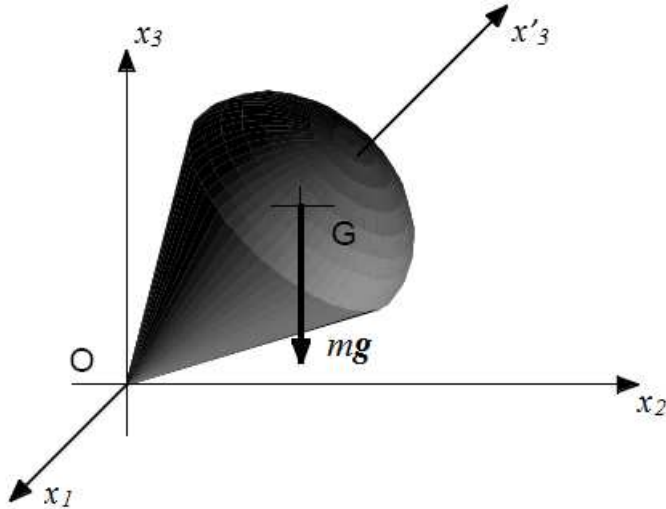


Figura E.2: Trottola.

suo peso $\mathbf{p} = m\mathbf{g}$.³

L'esempio più noto di giroscopio pesante è quello di una trottola posta come in figura E.2. Si prenda il punto fisso O come origine comune del sistema di riferimento fisso $\{O, x_1, x_2, x_3\}$, che è solidale alla Terra e con asse Ox_3 verticale ascendente, e di quello solidale al corpo rigido $\{O, x'_1, x'_2, x'_3\}$. Sia inoltre quest'ultimo un riferimento principale d'inerzia con l'asse Ox'_3 coincidente con l'asse giroscopico. Si noti che, essendo la forza peso equivalente ad un'unica forza applicata nel baricentro del corpo, che si trova sull'asse giroscopico, la proiezione del momento delle forze attive sull'asse giroscopico è nulla, infatti

$$M_{O,x'_3}^{(a)} = (G - O) \wedge m\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_3 = 0,$$

poiché, essendo $(G - O)$ parallelo ad $\boldsymbol{\epsilon}_3$, versore dell'asse giroscopico, i tre vettori che compaiono nel prodotto misto sono complanari. Si stanno inoltre trascurando le forze centrifughe composte e la precessione dell'asse terrestre. Si può dimostrare che, in assenza di attrito, il moto di un giroscopio pesante

³Il peso di un corpo, come abbiamo visto nelle Esercitazioni, è il risultante della forza di attrazione gravitazionale esercitata su di esso dalla Terra e della forza di trascinamento che si manifesta in un sistema di riferimento terrestre a causa del moto di rotazione della Terra rispetto al riferimento con origine nel centro della Terra ed assi diretti verso le stelle fisse. Si dimostra che, se un corpo non è troppo esteso, il peso è equivalente ad un'unica forza $m\mathbf{g}$, con \mathbf{g} accelerazione di gravità applicata nel baricentro di S .

è, per opportune condizioni iniziali e con buona approssimazione, un moto di precessione.

Per dimostrarlo si cominci ricordando la terza equazione di Eulero data da

$$C\dot{r} - (A - A)pq = M_{O,x'_3}^{(a)} = 0,$$

da cui segue

$$r = r_0,$$

con r_0 valore di r all'istante iniziale. Il momento della quantità di moto, decomposto rispetto alla base solidale è quindi

$$\mathbf{L}_O = Ap\boldsymbol{\epsilon}_1 + Aq\boldsymbol{\epsilon}_2 + Cr_0\boldsymbol{\epsilon}_3.$$

Inoltre, se all'istante iniziale la velocità angolare che si imprime al giroscopio è parallela al suo asse, le funzioni $p = p(t)$ e $q = q(t)$ sono nulle a tale istante, e poiché sono funzioni continue, non potranno assumere in tempi brevi valori molto elevati. Pertanto, scelto un istante di tempo $\tau > 0$ e definito

$$\Omega := \max_{t \in [0, \tau]} \left\{ \left| \frac{Ap}{C} \right|, \left| \frac{Aq}{C} \right| \right\}$$

sarà possibile determinare un valore di τ sufficientemente piccolo da garantire che $|r^0| \gg \Omega$, a patto di imprimere una velocità angolare iniziale elevata. L'esistenza del precedente massimo è garantita dal teorema di Weierstrass, avendosi a che fare con funzioni continue definite su un intervallo compatto. Pertanto, per il momento angolare si ha

$$\mathbf{L}_O = Cr_0 \left(\frac{Ap}{Cr_0} \boldsymbol{\epsilon}_1 + \frac{Aq}{Cr_0} \boldsymbol{\epsilon}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_3 \right) \simeq Cr_0 \boldsymbol{\epsilon}_3,$$

poiché nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ si ha

$$\left| \frac{Ap}{Cr_0} \right| \leq \frac{\Omega}{r_0} \ll 1, \quad \left| \frac{Aq}{Cr_0} \right| \leq \frac{\Omega}{r_0} \ll 1.$$

Derivando \mathbf{L}_O rispetto al tempo e sostituendo nella seconda equazione cardinale, si ottiene

$$\dot{\mathbf{L}}_O \simeq Cr_0 \frac{d}{dt} \boldsymbol{\epsilon}_3 = \mathbf{M}_O^{(a)} \Rightarrow \frac{d}{dt} \boldsymbol{\epsilon}_3 = \frac{1}{Cr_0} \mathbf{M}_O^{(a)},$$

si noti che questa equazione è valida in generale per un giroscopio fissato in un punto qualsiasi del suo asse giroscopico e a cui sia stata impressa una

velocità angolare iniziale molto grande nella direzione dell'asse giroscopico. Essa mostra come per cambiare la direzione dell'asse sia necessario un momento delle forze attive molto grande (questa proprietà prende il nome di tenacia degli assi in rapida rotazione), e mostra anche come, qualora appunto il momento delle forze esterne attive non sia trascurabile, la variazione della direzione dell'asse giroscopico risulti, istante per istante, parallela al momento delle forze e non alle forze stesse (tendenza al parallelismo).⁴

Nel caso della trottola la seconda equazione cardinale diventa

$$\begin{aligned} Cr_0 \frac{d}{dt} \boldsymbol{\epsilon}_3 &= Cr_0 \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon}_3 = (G - O) \wedge m\mathbf{g} = -m\mathbf{g} \wedge |G - O| \boldsymbol{\epsilon}_3, \\ \Rightarrow (Cr_0 \boldsymbol{\omega} - m|G - O|g \mathbf{e}_3) \wedge \boldsymbol{\epsilon}_3 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

con $g = |\mathbf{g}|$ ed essendo $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$. Ne viene che il vettore $(Cr_0 \boldsymbol{\omega} - m|G - O|g \mathbf{e}_3)$ deve essere parallelo ad $\boldsymbol{\epsilon}_3$, cioè deve esistere λ (eventualmente nullo) tale che

$$(Cr_0 \boldsymbol{\omega} - m|G - O|g \mathbf{e}_3) = \lambda \boldsymbol{\epsilon}_3,$$

da cui si trova

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{m|G - O|g}{Cr_0} \mathbf{e}_3 + \frac{\lambda}{Cr_0} \boldsymbol{\epsilon}_3. \quad (\text{E.5})$$

Mostriamo che l'angolo θ tra $\boldsymbol{\epsilon}_3$ ed \mathbf{e}_3 è costante nel tempo, si ha infatti

$$\frac{d}{dt} \cos \theta = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\epsilon}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \left(\frac{m|G - O|g}{Cr_0} \mathbf{e}_3 + \frac{\lambda}{Cr_0} \boldsymbol{\epsilon}_3 \right) \wedge \boldsymbol{\epsilon}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Adesso ricaviamo λ , moltiplicando ambo i membri della (E.5) scalarmente per $\boldsymbol{\epsilon}_3$, si ha

$$r_0 = \boldsymbol{\epsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\epsilon}_3 \cdot \left(\frac{m|G - O|g}{Cr_0} \mathbf{e}_3 + \frac{\lambda}{Cr_0} \boldsymbol{\epsilon}_3 \right),$$

da cui si trova

$$\lambda = C(r_0)^2 - mg|G - O|\cos\theta_0.$$

⁴La tenacia dell'asse giroscopico è sfruttata nella stabilizzazione degli aerei, delle navi, dei razzi, dei satelliti ed anche per il controllo dell'orientazione orizzontale o verticale di molti smartphone e tablet di ultima generazione, all'interno dei quali si trovano particolari giroscopi elettronici, che consentono di utilizzarli, grazie ad applicazioni dedicate, come livelle da muratori, teodoliti od anche in videogiochi a controllo tridimensionale

L'espressione della velocità angolare è in definitiva

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{mg|G - O|}{Cr_0} \mathbf{e}_3 + \left(r_0 - \frac{mg|G - O|}{Cr_0} \cos\theta_0 \right) \boldsymbol{\epsilon}_3. \quad (\text{E.6})$$

Essa è quindi la somma di un vettore costante nello spazio terrestre e di uno costante nello spazio solidale alla trottola. Il moto della trottola è quindi una precessione regolare con asse di figura quello giroscopico ed asse di precessione l'asse verticale. Nella realtà il moto di precessione non è mantenuto indefinitamente a causa della presenza dell'attrito che dissipa energia meccanica.

Appendice F

Funzioni implicite e forme differenziali

Sia $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un aperto e sia

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) \quad \text{con } \mathbf{f} \in C^1(D).$$

Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.1})$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2})$$

Teorema 12 (Teorema del Dini¹) *Supponiamo che in $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) \in D$ siano verificate le condizioni*

$$1. \quad \mathbf{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) = 0, \quad |\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{f}|(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \neq 0.$$

Allora esiste un insieme $R = I \times J \subset D$, con I e J aperti rispettivamente di \mathbb{R}^n ed \mathbb{R}^m e $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in R$, tale che $\forall \mathbf{x} \in I$, $\exists_1 \mathbf{y} \in J$ in corrispondenza del quale

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0.$$

¹Per la dimostrazione si veda Giusti, *Analisi Matematica*, vol. II oppure Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*

La funzione $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, che ad ogni $\mathbf{x} \in I$ associa il suddetto \mathbf{y} è $C^1(I)$ e

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g})(\mathbf{x}) = -((\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{-1}((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

con $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Forme differenziali

Una forma differenziale (1-forma, in realtà) in \mathbb{R}^n può essere *rozzamente* definita come un'espressione del tipo

$$\omega = f_1(\mathbf{x})dx_1 + \dots + f_n(\mathbf{x})dx_n,$$

con $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D aperto, $i = 1, \dots, n$.

Definizione 19 La forma ω è detta *esatta* se $\exists g : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ e $\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i, \forall \mathbf{x} \in D$.

Teorema 13 Siano D un aperto semplicemente connesso, $f_i \in C^1(D)$, $i = 1, \dots, n$. Condizione necessaria e sufficiente affinché la forma $\omega = f_i dx_i$ sia esatta è che:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Si noti che in \mathbb{R}^3 questa condizione diventa $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$, con $\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, Pagani, Salsa, Analisi Matematica II.

Si consideri un vincolo sulle velocità del tipo

$$\sum_{i=1}^l b_i \frac{d\lambda_i}{dt} + b_0 = 0.$$

Corrispondentemente, risulta definita la 1-forma in \mathbb{R}^{l+1}

$$\omega = b_1(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t)d\lambda_1 + \dots + b_l(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t)d\lambda_l + b_0(\lambda_1, \dots, \lambda_l, t)dt.$$

Quindi il vincolo è anolonomo se e solo se la 1-forma non è esatta. Infatti, nel caso in cui essa fosse esatta, il vincolo proverrebbe da uno sulle posizioni!